









## **Prefazione**

Il presente volume raccoglie testi proposti dagli autori nell'ambito dei vari appelli d'esame per il corso di Matematica Finanziaria tenuto presso la Facoltà di Economia dell'Università della Calabria. È suggerito ad ogni lettore di descrivere dapprima l'operazione finanziaria in termini di scadenziario: importi, scadenze, unità di misura,... e solo successivamente intraprendere la lettura dello svolgimento che risente della rigidità degli autori e resta inteso come mero suggerimento.

Ringraziamo sin d'ora tutti coloro che apporteranno contributi critici al presente volume.

*Gli Autori*



1. Dimostrare che la seguente legge di capitalizzazione

$$m(t, s) = e^{0,2(s-t)}, \quad t \leq s$$

è

- a) uniforme rispetto al tempo;
- b) scindibile.

Cosa si può dire del fattore di sconto coniugato?

*Svolgimento*

- a) Per dimostrare l'uniformità della legge di capitalizzazione bisogna provare che

$$m(t + \Delta t, s + \Delta t) = m(t, s), \quad \forall t \leq s \quad \text{e} \quad \forall \Delta t.$$

La legge  $m(t, s) = e^{0,2(s-t)}$  è uniforme. Infatti, siano  $t \leq s$  e  $\Delta t \neq 0$

$$m(t + \Delta t, s + \Delta t) = e^{0,2(s+\Delta t-(t+\Delta t))} = e^{0,2(s-t)} = m(t, s).$$

- b) Per dimostrare la scindibilità della legge di capitalizzazione occorre dimostrare che

$$m(t, s) = m(t, T)m(T, s), \quad \forall t < T < s.$$

La legge  $m(t, s) = e^{0,2(s-t)}$  è scindibile. Infatti, siano  $t < T < s$

$$m(t, T)m(T, s) = e^{0,2(T-t)}e^{0,2(s-T)} = e^{0,2(s-t)} = m(t, s).$$

Per quanto riguarda il fattore di sconto coniugato  $v(t, s)$  valgono le stesse considerazioni svolte per il fattore di capitalizzazione  $m(t, s)$ , in quanto  $v(t, s) = 1/m(t, s)$ .

2. Data l'intensità istantanea d'interesse

$$\delta(t, s) = a + 2bk(s - t), \quad t \leq s,$$

con  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , determinare, motivando la risposta, per quali valori di  $k \geq 0$  la funzione valore  $v(t, s) = e^{-\int_t^s \delta(t, u) du}$  corrisponde, è

- a) uniforme rispetto al tempo;
- b) scindibile.

Cosa si può dire del fattore montante coniugato?

*Svolgimento*

- a) Per dimostrare l'uniformità della legge di sconto bisogna provare che

$$v(t + \Delta t, s + \Delta t) = v(t, s), \quad \forall t \leq s \quad \text{e} \quad \forall \Delta t.$$

La legge di sconto sopra definita è uniforme per tutti i valori del parametro  $k$ . Infatti,

$$v(t, s) = e^{-\int_t^s a + 2bk(u-t) du} = e^{-[a(s-t) + bk(s-t)^2]}, \quad t \leq s.$$

Siano  $t \leq s$  e  $\Delta t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} v(t + \Delta t, s + \Delta t) &= e^{-\{a[s + \Delta t - (t + \Delta t)] + bk[s + \Delta t - (t + \Delta t)]^2\}} = \\ &= e^{-[a(s-t) + bk(s-t)^2]} = v(t, s). \end{aligned}$$

- b) Per dimostrare la scindibilità della legge di sconto occorre dimostrare che

$$v(t, s) = v(t, T)v(T, s), \quad \forall t < T < s.$$

La legge di sconto sopra definita è scindibile solo nel caso in cui  $k = 0$ . Infatti, siano  $t < T < s$

$$\begin{aligned} v(t, T)v(T, s) &= e^{-[a(T-t) + bk(T-t)^2]} e^{-[a(s-T) + bk(s-T)^2]} = \\ &= e^{-\{a(s-t) + bk[(T-t)^2 + (s-T)^2]\}}. \end{aligned}$$

Affinchè  $v(t, s) = v(t, T)v(T, s)$ , dovrebbe essere  $bk(s - t)^2 = bk[(T - t)^2 + (s - T)^2]$ , impossibile per  $k > 0$ .

In conclusione la legge di sconto risulta scindibile per  $k = 0$ . Considerazioni analoghe valgono se utilizziamo la legge di capitalizzazione coniugata in quanto

$$m(t, s) = e^{\int_t^s \delta(t, u) du}.$$

3. Dimostrare che la seguente legge di capitalizzazione

$$m(t, s) = 1 + 0,1(s - t), \quad t \leq s$$

è uniforme rispetto al tempo ma non scindibile.

Cosa si può dire del fattore di sconto (razionale) coniugato?

*Svolgimento*

Per dimostrare l'uniformità della legge di capitalizzazione bisogna provare che

$$m(t + \Delta t, s + \Delta t) = m(t, s), \quad \forall t \leq s \quad \text{e} \quad \forall \Delta t.$$

La legge di capitalizzazione sopra definita è uniforme. Infatti, siano  $t \leq s$  e  $\Delta t \neq 0$

$$\begin{aligned} m(t + \Delta t, s + \Delta t) &= 1 + 0,1(s + \Delta t - (t + \Delta t)) = \\ &= 1 + 0,1(s - t) = m(t, s). \end{aligned}$$

Per dimostrare che la legge di capitalizzazione sopra definita non è scindibile è sufficiente dimostrare che esistono  $t, T, s$  con  $t < T < s$  per cui

$$m(t, s) \neq m(t, T)m(T, s).$$

Siano  $t < T < s$ ,

$$\begin{aligned} m(t, T)m(T, s) &= [1 + 0,1(T - t)][1 + 0,1(s - T)] = \\ &= 1 + 0,1(s - t) + 0,1^2(T - t)(s - T) > 1 + 0,1(s - t) = m(t, s). \end{aligned}$$

Considerazioni analoghe valgono se utilizziamo la legge di sconto coniugata  $v(t, s) = 1/m(t, s)$ .

4. Dimostrare che la seguente legge di sconto (commerciale)

$$v(t, s) = 1 - 0,1(s - t), \quad 0 \leq s - t < 10$$

è uniforme rispetto al tempo ma non scindibile.  
Cosa si può dire del fattore montante coniugato?

*Svolgimento*

Per dimostrare l'uniformità della legge di sconto bisogna provare che

$$v(t + \Delta t, s + \Delta t) = v(t, s), \quad 0 \leq s - t < 10 \quad \text{e} \quad \forall \Delta t.$$

La legge di sconto sopra definita è uniforme. Infatti, siano  $t \leq s$  come sopra e  $\Delta t \neq 0$ ,

$$v(t + \Delta t, s + \Delta t) = 1 - 0,1(s + \Delta t - (t + \Delta t)) = 1 - 0,1(s - t) = v(t, s).$$

Per dimostrare che la legge di sconto sopra definita non è scindibile è sufficiente dimostrare che esistono  $t, T, s$  con  $t < T < s$  e  $s - t < 10$  per cui

$$v(t, s) \neq v(t, T)v(T, s).$$

Siano  $t < T < s$  con  $s - t < 10$ ,

$$\begin{aligned} v(t, T)v(T, s) &= [1 - 0,1(T - t)][1 - 0,1(s - T)] = \\ &= 1 - 0,1(s - t) + 0,1^2(T - t)(s - T) > 1 - 0,1(s - t) = v(t, s). \end{aligned}$$

Considerazioni analoghe valgono se utilizziamo la legge di capitalizzazione coniugata

$$m(t, s) = \frac{1}{1 - 0,1(s - t)}, \quad 0 \leq s - t < 10.$$

5. Un'azienda, per finanziare il pagamento della prima rata semestrale,  $R$ , del rimborso di un finanziamento a rata costante anticipata, di durata 7 anni, al tasso d'interesse annuo dell'8%, emetterà all'epoca di pagamento della prima rata un certo numero di titoli a cedola nulla con scadenza biennale.

Sapendo che  $R = 300.000$  euro, si determini l'ammontare del debito all'istante in cui è stato contratto:

Inoltre, tenendo conto che:

- il tasso d'interesse annuo composto del mercato dei titoli di stato con scadenza biennale è del 3%,
- l'azienda vuole offrire un rendimento superiore dello 0,5% rispetto ai titoli di stato,
- il prezzo di rimborso di ogni titolo a cedola nulla è di 100 euro, determinare:

- a) il prezzo di emissione di ogni titolo a cedola nulla
- b) il numero minimo di titoli che l'azienda deve emettere per garantirsi la possibilità di pagare la rata  $R$ ;
- c) il tasso biennale equivalente al tasso annuo in capitalizzazione esponenziale al quale avviene l'operazione di emissione;
- d) l'intensità istantanea d'interesse della legge esponenziale, su base semestrale, alla quale avviene l'operazione di emissione;
- e) a quale prezzo sarebbero stati emessi i titoli facendo riferimento alla legge lineare, con lo stesso tasso d'interesse.

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $i = 8\%$  il tasso annuo d'interesse utilizzato nel rimborso del debito, con  $i' = 3\%$  il tasso annuo d'interesse corrisposto dai titoli di stato e con  $i'' = 3,5\%$  il rendimento annuo dei titoli a cedola nulla (TCN) emessi dall'azienda.

Per calcolare il debito iniziale (trattandosi di rimborso con scadenza semestrale) occorre determinare il tasso semestrale,  $i_2$ , equivalente al tasso annuo  $i$ ,

$$i_2 = (1 + i)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,08^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0392.$$

Il valore del debito all'epoca iniziale si ottiene sommando il valore

attuale di ciascuna rata, cioè

$$\begin{aligned} R \sum_{k=0}^{13} (1 + i_2)^{-k} &= R \ddot{a}_{\overline{14}|0,0392} = \\ &= 300.000 \left[ \frac{1 - (1,0392)^{-14}}{0,0392} \right] 1,0392 = 3.310.620,227 \text{ euro.} \end{aligned}$$

a) Il prezzo di emissione di un TCN,  $P$ , si ottiene come

$$P = 100(1,035)^{-2} = 93,3511 \text{ euro.}$$

b) Il numero minimo,  $n$ , di TCN che l'impresa deve emettere deve essere tale da uguagliare il valore della rata, cioè

$$R = nP \quad \text{da cui} \quad n = \frac{R}{P} = 3.213,67.$$

Poichè il numero di titoli che l'impresa emette deve essere intero, allora saranno emessi 3.214 TCN.

c) Il tasso biennale al quale avviene l'operazione finanziaria è

$$i = 1,035^2 - 1 = 0,0712 \quad (7,12\% \text{ biennale}).$$

d) L'intensità istantanea d'interesse su base annua è

$$\delta' = \log(1 + i') = \log(1,035) = 0,0344 \text{ anni}^{-1}.$$

L'intensità istantanea d'interesse su base semestrale è

$$\delta'_2 = \frac{\delta'}{2} = 0,0172 \text{ semestri}^{-1}.$$

e) Facendo riferimento ad una sottostante legge di capitalizzazione lineare con tasso d'interesse annuo pari al 3,5%, il prezzo  $P$  di ogni T.C.N. è dato da

$$P = \frac{100}{1 + (2 \times 0,035)} = 93,4579 \text{ euro.}$$

6. Un investimento assicura, a fronte di un versamento immediato di 1.000.000 di euro, il raddoppio del capitale in 7 anni nel caso in cui i tassi sul mercato rimangano costanti per il periodo in questione.

In realtà i tassi scendono dopo un anno di un punto percentuale e dopo altri quattro anni di ulteriori due punti. Calcolare sia in regime esponenziale che in regime lineare:

- a) il tasso annuo ipotetico che avrebbe assicurato il raddoppio del capitale in 7 anni;
- b) il capitale accumulato nella realtà;
- c) di quanto si sarebbe dovuto protrarre l'investimento per realizzare il raddoppio del capitale nell'ipotesi che, dopo la discesa del 2%, i tassi fossero rimasti inalterati.

*Svolgimento*

- a) Il tasso d'interesse annuo che assicura il raddoppio del capitale in 7 anni è:  
in regime esponenziale,

$$1.000.000(1+i)^7 = 2.000.000 \quad \text{da cui}$$
$$i = 2^{1/7} - 1 = 0,1041 \quad (10,41\% \text{ annuo}).$$

In regime lineare

$$1.000.000(1+7i) = 2.000.000 \quad \text{da cui}$$
$$i = \frac{1}{7} = 0,1429 \quad (14,29\% \text{ annuo}).$$

- b) Il capitale accumulato nella realtà è: in regime esponenziale,

$$1.000.000(1,1041)(1,0941)^4(1,0741)^2 =$$
$$= 1.825.264,954 \quad \text{euro.}$$

In regime lineare, per calcolare il capitale accumulato occorre determinare l'interesse prodotto nei tre intervalli di tempo caratterizzati da differenti livelli dei tassi d'interesse. Ricordiamo che l'interesse prodotto da un capitale di ammontare  $S$  in un intervallo di tempo di ampiezza  $\tau$  in regime lineare è

$$I(\tau) = S \times i \times \tau.$$

Nel primo intervallo di tempo di ampiezza unitaria si produce un interesse

$$I(1) = 1.000.000 \times 0,1429 = 142.900 \text{ euro.}$$

Nel secondo intervallo di tempo di ampiezza pari a quattro anni si produce un interesse pari a

$$I(4) = 1.000.000 \times 0,1329 \times 4 = 531.600 \text{ euro.}$$

Nel terzo intervallo di tempo di ampiezza pari a due anni si produce un interesse pari a

$$I(2) = 1.000.000 \times 0,1129 \times 2 = 225.800 \text{ euro.}$$

L'interesse complessivamente prodotto nei sette anni si ottiene sommando gli interessi prodotti nei singoli intervalli di tempo e risulta pari a 900.300 euro.

La somma complessivamente accumulata nella realtà è pari a 1.900.300 euro.

- c) Per realizzare il raddoppio del capitale, l'investimento si sarebbe dovuto protrarre per un ulteriore periodo,  $\tau'$ , tale che: in regime esponenziale

$$1.825.264,954(1,0741)^{\tau'} = 2.000.000 \text{ da cui}$$

$$\tau' = \frac{\log(1,0957)}{\log(1,0741)} = 1,2785 \text{ anni.}$$

In regime lineare per ottenere il raddoppio del capitale dovrà essere prodotto un interesse pari a

$$2.000.000 - 1.900.300 = 99.700 \text{ euro.}$$

L'intervallo di tempo,  $\tau'$ , necessario a produrre tale importo in capitalizzazione lineare si ottiene risolvendo, rispetto all'incognita  $\tau'$  la seguente equazione

$$1.000.000 \times 0,1129 \times \tau' = 99.700$$

da cui  $\tau' = 0,8831$  anni.

7. L'individuo  $\mathcal{I}$ , all'atto del compimento del suo 25° anno, intende sottoscrivere un contratto che gli assicura una rendita perpetua mensile posticipata di rata 700 euro a partire dal compimento del suo 65° anno. Ipotizzando che il tasso d'interesse su base annua sia del 3,6%, determinare

a) quale sarà il prezzo della rendita sopra descritta nel giorno del compimento del 25° anno.

Se invece che un unico importo  $\mathcal{I}$  volesse versare rate annue costanti posticipate, quale sarebbe l'ammontare della rata nelle due seguenti ipotesi:

b) versamenti per 30 anni;

c) versamenti fino a quando  $\mathcal{I}$  compirà 65 anni.

*Svolgimento*

a) Indichiamo con  $i$  il tasso d'interesse annuo pari al 3,6%. Poichè la rendita è mensile, dobbiamo calcolare il tasso mensile equivalente in capitalizzazione composta,  $i_{12}$ , cioè

$$i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1 = 1,036^{1/12} - 1 = 0,003 \quad (0,3\% \text{ mensile}).$$

Il prezzo oggi della rendita,  $\mathbf{r}$ , sopra descritta è uguale al valore attuale delle rate future e, tenendo conto che si tratta di una rendita perpetua, posticipata, differita di 480 mesi, si ha

$$\begin{aligned} W(0, \mathbf{r}) &= R_{480} a_{\infty|i_{12}} = R(1 + i_{12})^{-480} \left( \frac{1}{i_{12}} \right) = \\ &= 700(1,003)^{-480} \left( \frac{1}{0,003} \right) = 55.402,4455 \text{ euro.} \end{aligned}$$

b) Se l'individuo intende rateizzare il pagamento della rendita in 30 versamenti annui immediati posticipati di ammontare  $R'$ , tale importo si ricava dalla relazione

$$\begin{aligned} R' a_{30|i} &= W(0, \mathbf{r}) \quad \text{da cui} \quad R' = \frac{W(0, \mathbf{r})}{a_{30|i}} = \\ &= \frac{55.402,445 \times 0,036}{1 - (1,036)^{-30}} = 3.050,1636 \text{ euro.} \end{aligned}$$

- c) Se l'individuo intende rateizzare il pagamento della rendita fino a quando compirà 65 anni, cioè in 40 versamenti annui costanti posticipati, dovrà corrispondere un versamento  $R''$  tale che

$$\begin{aligned} R'' a_{\overline{40}|i} &= W(0, \mathbf{r}) \quad \text{da cui} \quad R'' = \frac{W(0, \mathbf{r})}{a_{\overline{40}|i}} = \\ &= \frac{55.402,4455 \times 0,036}{1 - (1,036)^{-40}} = 2.634,7334 \quad \text{euro.} \end{aligned}$$

8. Un individuo  $\mathcal{I}$  stipula un contratto di *leasing* per un'automobile che costa 25.000 euro. I termini del contratto sono i seguenti:
- a) pagamento di 24 rate costanti di cui 5 all'atto della stipula del contratto e le rimanenti con scadenza mensile a partire dal mese successivo alla stipula del contratto;
  - b) alla scadenza possibilità di acquistare l'auto pagando una cifra pari al valore residuo che risulta essere pari al 10% del costo iniziale;
  - c) tasso annuo del 12%.

Determinare in regime esponenziale la rata mensile che  $\mathcal{I}$  deve corrispondere.

Supponendo che insieme alla decima rata  $\mathcal{I}$  paga la somma di 5.000 euro, che viene decurtata dal debito residuo, determinare, mantenendo le stesse scadenze, l'ammontare delle rimanenti rate che  $\mathcal{I}$  dovrà corrispondere.

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $i = 12\%$  il tasso d'interesse annuo applicato all'operazione di leasing. Poichè si devono corrispondere rate mensili, bisogna determinare il tasso d'interesse mensile equivalente in capitalizzazione composta

$$i_{12} = (1 + i)^{1/12} - 1 = 1,12^{1/12} - 1 = 0,0095 \quad (0,95\% \text{ mensile}).$$

Il valore attuale dei versamenti da effettuare da  $\mathcal{I}$  è dato dalla somma dei cinque versamenti effettuati all'epoca di sottoscrizione del contratto e dal valore attuale dei diciannove versamenti mensili futuri. Indicando con  $R$  l'ammontare di ciascun versamento,

$$5R + R \sum_{k=1}^{19} (1 + i_{12})^{-k} = R(5 + a_{\overline{19}|i_{12}}).$$

Il valore attuale delle prestazioni acquistate da  $\mathcal{I}$  è

$$25.000 - 0,1 \times 25.000(1 + i_{12})^{-19} = 22.911,0893 \quad \text{euro}.$$

Per determinare l'ammontare della rata  $R$  occorre uguagliare il valore attuale dei pagamenti che l'individuo effettua ed il valore

attuale delle prestazioni acquistate

$$R(5 + a_{\overline{19}|i_{12}}) = 22.911,0893 \quad \text{da cui} \quad R = 1.026,9875 \quad \text{euro.}$$

Immediatamente dopo il pagamento della decima rata il debito residuo dell'operazione finanziaria è dato dal valore al quinto mese dei pagamenti rimanenti, cioè

$$R \sum_{k=1}^{14} (1+i_{12})^{-k} = Ra_{\overline{14}|i_{12}} + 2.500(1+i_{12})^{-14} = 15.593,3201 \quad \text{euro.}$$

Se a questa somma decurtiamo l'importo di 5.000 euro versati assieme alla decima rata otteniamo che il debito residuo è pari a 10.593,3201 euro. La nuova rata  $R'$  da corrispondere si otterrà dalla relazione

$$R'a_{\overline{14}|i_{12}} + 2500(1+i_{12})^{-14} = 10.593,3201 \quad \text{da cui}$$

$$R' = 643,8771 \quad \text{euro.}$$

9. Un individuo  $\mathcal{I}$  di età 35 anni intende acquistare una rendita che gli consentirà di percepire una rata mensile posticipata pari a  $R$  a partire dall'età di 65 anni e fino all'età di 85 anni. Per fare questo intende effettuare 10 versamenti immediati posticipati annui, ciascuno pari a 1.000 euro e subito dopo 10 versamenti semestrali posticipati di 750 euro. Ipotizzando una sottostante legge di capitalizzazione composta con un tasso d'interesse annuo pari al 4%, determinare:

- a) l'ammontare della rata  $R$ ;
- b) la duration della rendita di rata  $R$  calcolata all'epoca in cui  $\mathcal{I}$  compirà 65 anni;
- c) il T.I.R. dell'operazione finanziaria di acquisto della rendita di rata  $R$ .

*Svolgimento*

- a) Indichiamo con  $i = 4\%$  il tasso d'interesse annuo in base al quale avviene l'operazione finanziaria. Il tasso semestrale equivalente in capitalizzazione composta è

$$i_2 = (1 + i)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1,04^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,0198 \quad (1,98\% \text{ semestrale}).$$

Il tasso d'interesse mensile equivalente in capitalizzazione composta è

$$i_{12} = (1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,04^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0033 \quad (0,33\% \text{ mensile}).$$

Il valore attuale dei versamenti che  $\mathcal{I}$  effettuerà è

$$1000a_{\overline{10}|0,04} + 750a_{\overline{20}|0,0198} = 12.667,2451 \quad \text{euro.}$$

Il valore attuale delle prestazioni che l'individuo riceverà è

$${}_{360}a_{\overline{240}|i_{12}} R = 50,5779R.$$

Per determinare l'ammontare della rata occorre uguagliare il valore attuale dei pagamenti di  $\mathcal{I}$  ed il valore attuale delle prestazioni che  $\mathcal{I}$  riceverà

$$12.667,2451 = 50,5779R \quad \text{da cui} \quad R = 250,4502 \quad \text{euro.}$$

- b) Se assumiamo come origine dei tempi il giorno in cui  $\mathcal{I}$  compirà 65 anni, il flusso delle rate che egli riscuoterà configura una rendita,  $\mathbf{r}$ , immediata posticipata di durata  $m=240$  mesi e rata mensile pari a  $R$ . La duration di una tale rendita è data da

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{r}) &= \frac{1 + i_{12}}{i_{12}} - \frac{m}{(1 + i_{12})^m - 1} = \\ &= \frac{1,0033}{0,0033} - \frac{240}{1,0033^{240} - 1} = 104,8487 \text{ mesi.} \end{aligned}$$

- c) essendo l'operazione di acquisto della rendita di rata  $R$  equa per costruzione, il T.I.R. ad essa relativo è uguale al 4% su base annua.

10. Un individuo  $\mathcal{I}$  ha contratto 5 anni fa un mutuo di 40.000 euro per l'acquisto della casa da rimborsare mediante rate costanti, annue, posticipate al tasso dell'8%. L'importo della rata è stato calcolato tenendo conto che  $\mathcal{I}$  era in grado di rimborsare un importo non superiore al 40% della sua retribuzione annua pari a 10.000 euro.

Determinare il numero di rate che  $\mathcal{I}$  dovrà corrispondere per estinguere il mutuo.

Oggi  $\mathcal{I}$  ottiene la possibilità di rinegoziare il mutuo al tasso del 5% e ottiene un aumento della sua retribuzione annua che diventa di 15.000 euro.  $\mathcal{I}$  intende ora acquistare un'automobile che costa 12.000 euro che pagherà mediante rate annue immediate costanti e posticipate al tasso del 9%. Sapendo che  $\mathcal{I}$  deve comunque rispettare il vincolo relativo al 40% della retribuzione, determinare quanti anni sono necessari per rimborsare il finanziamento relativo all'automobile.

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $i = 8\%$  il tasso d'interesse dell'operazione finanziaria di rimborso del prestito della somma  $S = 40.000$  euro.  $\mathcal{I}$  non è in grado di rimborsare una rata annua,  $R$ , superiore al 40% della sua retribuzione, cioè 4.000 euro. Per estinguere il mutuo,  $\mathcal{I}$  dovrà corrispondere un numero di rate,  $m$ , che si ottiene risolvendo l'equazione

$$S = Ra_{\overline{m}|i} \quad \text{da cui} \quad m = -\frac{\log(1 - iS/R)}{\log(1 + i)} = 20,9124 \quad \text{anni.}$$

Poichè  $m$  non è un numero intero, allora il numero di rate da pagare è uguale a  $\lceil m \rceil = 21$  anni. L'ammontare della rata,  $R'$ , nel caso in cui vengano effettuati 21 versamenti è

$$R' = \frac{40.000}{a_{\overline{21}|0,08}} = \frac{40.000 \times 0,08}{1 - (1,08)^{-21}} = 3.993,29 \quad \text{euro.}$$

Il debito residuo dell'operazione finanziaria all'istante attuale è

$$R'a_{\overline{16}|0,08} = 3.993,29 \left( \frac{1 - (1,08)^{-16}}{0,08} \right) = 35.346,084 \quad \text{euro.}$$

Poichè  $\mathcal{I}$  ottiene di rimborsare il debito residuo al tasso d'interesse annuo  $i' = 5\%$ , l'ammontare della rata annua ancora da corrispondere sarà pari a

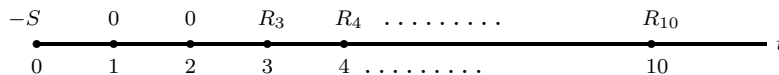
$$R'' = \frac{35.346,084 \times 0,05}{1 - 1,05^{-16}} = 3.261,3799 \text{ euro.}$$

Dopo aver acquistato l'automobile, il vincolo sulla retribuzione impone ad  $\mathcal{I}$  di non poter corrispondere complessivamente un pagamento superiore a 6.000 euro. L'ammontare massimo della rata,  $R'''$ , che  $\mathcal{I}$  potrà versare per l'acquisto dell'automobile è quindi pari a  $6.000 - 3.261,3799 = 2.738,6201$  euro. Il numero di versamenti da effettuare per rimborsare la somma di  $S' = 12.000$  euro è

$$n = -\frac{\log(1 - i'S'/R''')}{\log(1 + i')} = 5,8190 \text{ anni.}$$

Poichè  $n$  non è un numero intero, allora il numero di rate da pagare per rimborsare la somma di 12.000 euro è  $\lceil n \rceil = 6$  anni.

11. Il finanziamento di un capitale  $S = 1.000.000$  di euro viene rimborsato secondo il metodo a quota capitale costante con 10 rate immediate posticipate annue di cui 2 di preammortamento (quindi solo interessi!).
- Descrivere il piano d'ammortamento secondo la legge esponenziale con tasso annuo  $i = 7\%$ .
  - Determinare in  $t = 5$  anni, immediatamente dopo il pagamento della quinta rata, la scadenza, la vita a scadenza, la scadenza media aritmetica e la duration del flusso di pagamenti residui rispetto alla struttura piatta descritta al punto a).
  - Sia  $i^*$  il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria



essendo il tempo misurato in anni e  $R_k = C_k + I_k$ ,  $C_k$  quota capitale e  $I_k$  quota interessi relative al  $k$ -esimo anno del piano d'ammortamento descritto in a). Dire, motivando la risposta, se

$$\begin{aligned}
 i^* &> i = 7\% \\
 i^* &= i = 7\% \\
 i^* &< i = 7\%
 \end{aligned}$$

### Svolgimento

- L'ammontare delle due rate di preammortamento si ottiene moltiplicando il tasso d'interesse  $i = 7\%$  per il capitale  $S$  preso a prestito, così  $R_1 = R_2 = 70.000$  euro. La quota capitale costante  $C$  si ottiene rapportando il capitale preso a prestito al numero di pagamenti, cioè  $C = S/m = 125.000$  euro. Il piano d'ammortamento del capitale  $S$  è di seguito riportato

$k$	$R_k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	0	1.000.000
1	70.000	70.000	0	1.000.000
2	70.000	70.000	0	1.000.000
3	195.000	70.000	125.000	875.000
4	186.250	61.250	125.000	750.000
5	177.500	52.500	125.000	625.000
6	168.750	43.750	125.000	500.000
7	160.000	35.000	125.000	375.000
8	151.250	26.250	125.000	250.000
9	142.500	17.500	125.000	125.000
10	133.750	8750	125.000	0

- b) In  $t = 5$  anni la scadenza dell'operazione finanziaria è  $t_m = 10$  anni, la vita a scadenza è  $t_m - t = 5$  anni, la scadenza media aritmetica (immediatamente dopo il pagamento della quinta rata) è

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=6}^{10} (k-5)R_k}{\sum_{k=6}^{10} R_k} = 2,8843 \quad \text{anni,}$$

e la duration è

$$D(5, \mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=6}^{10} (k-5)R_k(1+i)^{-(k-5)}}{\sum_{k=6}^{10} R_k(1+i)^{-(k-5)}} = 2,7508 \quad \text{anni.}$$

- c) Il tasso interno di rendimento,  $i^*$ , dell'operazione finanziaria descritta al punto c) non può che essere inferiore al tasso d'interesse del 7%. Infatti, il tasso d'interesse del 7% rappresenta il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria di rimborso del prestito contenente anche il pagamento delle due rate di preammortamento. L'operazione finanziaria di cui al punto c) risulta pertanto meno onerosa di quella con le rate di preammortamento e, di conseguenza, il relativo T.I.R. sarà inferiore al 7%.

12. Un individuo  $\mathcal{I}$  al fine di coprire il 40% del costo di un appartamento di importo pari a 140.000 euro, contrae un prestito con un istituto bancario. La somma erogata verrà rimborsata in sei rate immediate posticipate semestrali e costanti al tasso nominale annuo del 7%.

a) Costruire il piano d'ammortamento del debito contratto.

All'epoca  $t_3 = 1,5$  anni, immediatamente dopo il pagamento della terza rata, la banca comunica una variazione del tasso nominale annuo che diventa pari all' 8%. Considerando che l'individuo  $\mathcal{I}$  non intende aumentare l'ammontare della rata (semestrale) precedentemente calcolata,

b) determinare il numero di rate ancora da pagare per estinguere il debito.

c) Determinare il T.I.R. dell'operazione finanziaria sopra descritta tenendo in considerazione la variazione del tasso d'interesse che avviene all'epoca  $t_3 = 1,5$  anni.

*Svolgimento*

a) Indichiamo con  $j_{\text{nom}}(2) = 7\%$  il tasso nominale al quale viene erogato il finanziamento della somma  $S = 0,4 \times 140.000 = 56.000$  euro. Il tasso semestrale da utilizzare nella redazione del piano d'ammortamento è  $i_2 = j_{\text{nom}}(2)/2 = 3,5\%$ . La rata  $R$  si ottiene dalla relazione

$$Ra_{\overline{6}|i_2} = S \quad \text{da cui}$$

$$R = \frac{56.000 \times 0,035}{1 - (1,035)^{-6}} = 10.509,4197 \quad \text{euro.}$$

Il piano d'ammortamento è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	56.000
1	1.960	8.549,4197	47.450,5803
2	1.660,7703	8.848,6494	38.601,9309
3	1.351,0676	9.158,3521	29.443,5788
4	1.030,5253	9.478,8944	19.964,6844
5	698,7640	9.810,6557	10.154,0287
6	355,3910	10.154,0287	0

- b) Indichiamo con  $j'_{\text{nom}}(2) = 8\%$  il nuovo tasso nominale praticato dalla banca a partire da  $t_3 = 1,5$  anni. Il nuovo tasso d'interesse periodale è  $i'_2 = 4\%$ . Considerato che l'individuo non intende pagare una rata maggiore di quella originariamente determinata e che il debito residuo all'epoca  $t = 1,5$  anni è pari a 29.443,5788 euro, per estinguerlo sarà necessario versare un numero,  $m$ , di rate che si ottiene dalla relazione

$$29.443,5788 = Ra_{\overline{m}|i'_2} \quad \text{da cui} \quad m = 3,0315 \quad \text{semestri.}$$

Poiché il numero di versamenti ancora da effettuare deve essere un numero intero allora il numero di rate ancora da pagare è pari a 4. L'ammontare della nuova rata  $R'$  si ottiene dalla relazione

$$R'a_{\overline{4}|0.04} = 29.443,5788 \quad \text{da cui} \quad R' = 8.111,4129 \quad \text{euro.}$$

- c) Considerando la variazione del tasso d'interesse, l'operazione finanziaria di rimborso del prestito è costituita dal flusso di importi  $\mathbf{x} = \{S, -R, -R, -R, -R', -R', -R', -R'\}$  esigibili alle scadenze  $\mathbf{t} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  semestri. Indicando con  $i$  il tasso d'interesse della legge esponenziale espresso su base semestrale e con  $v$  il fattore di sconto coniugato, bisogna determinare il valore  $v^*$  che soddisfa l'equazione

$$56.000 - 10.509,4197 \sum_{k=1}^3 v^k - 8.111,4129 \sum_{k=4}^7 v^k = 0.$$

Si tratta di un'equazione di settimo grado nell'incognita  $v$  che presenta una sola alternanza di segno. Per prima cosa osserviamo che l'esistenza del T.I.R. è garantita dal fatto che stiamo considerando un'operazione di finanziamento in cui  $S < 3R + 4R'$ . Posto

$$\begin{aligned} f(v) &= R \sum_{k=1}^3 v^k + R' \sum_{k=4}^7 v^k = \\ &= 10.509,4197 a_{\overline{3}|i} + 8.111,4129_3 a_{\overline{4}|i} = \end{aligned}$$

$$= 10.509,4197v \frac{1-v^3}{1-v} + 8.111,4129v^4 \frac{1-v^4}{1-v},$$

al fine di determinare la soluzione di  $S = f(v)$  utilizziamo il metodo di interpolazione lineare. Dobbiamo così individuare due valori  $v_1$  e  $v_M$  del fattore di sconto tali che  $f(v_1) < S < f(v_M)$ . Tenendo conto che il T.I.R. su base semestrale sarà compreso tra il 3,5% e il 4% possiamo scegliere  $v_M = 0,9662$  a cui corrisponde il valore  $f(0,9662) = 56.315,9355$  e  $v_1 = 0,9615$  a cui corrisponde il valore  $f(0,9615) = 55.339,8308$ . La retta nel piano  $(v, y)$  passante per i punti  $(v_1, f(v_1))$  e  $(v_M, f(v_M))$  ha equazione

$$y = f(v_1) + [f(v_M) - f(v_1)] \frac{v - v_1}{v_M - v_1}.$$

Così l'ascissa  $v_2$  del punto d'intersezione di tale retta con la retta  $y = S$  è pari a:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + \frac{S - f(v_1)}{f(v_M) - f(v_1)}(v_M - v_1) = \\ &= 0,9615 + \frac{56.000 - 55.339,8308}{56.315,9355 - 55.339,8308}(0,9662 - 0,9615) = \\ &= 0,96467. \end{aligned}$$

Al valore  $v_2 = 0,96467$  corrisponde un valore della funzione  $f(v_2) = 55.995,4182$ . Se riteniamo accettabile un livello di approssimazione pari a  $\epsilon = 0,0001$  per il fattore di sconto, allora il valore  $v_2$  ottenuto potrà considerarsi come soluzione per difetto se per  $v_2 + \epsilon$  si ha  $f(v_2 + \epsilon) > S$ , altrimenti a partire da  $v_M$  e  $v_2$  occorre determinare  $v_3$  attraverso la formula ricorsiva (cfr. sopra)

$$v_{n+1} = v_n + \frac{S - f(v_n)}{f(v_M) - f(v_n)}(v_M - v_n).$$

Poiché  $v_2 + \epsilon = 0,96477$  e  $f(0,96477) = 56.017,0385$  allora possiamo arrestare il procedimento iterativo e considerare  $0,96467$  come soluzione per difetto e  $0,96477$  come soluzione per eccesso. Il T.I.R. su base semestrale è così compreso tra

$i_2 = (1/0,96477) - 1 = 0,0365 = 3,65\%$  semestrale equivalente a  $i = 7,43\%$  annuo e  $i_2 = (1/0,96467) - 1 = 0,0366 = 3,66\%$  semestrale equivalente a  $i = 7,45\%$  annuo.

13. Un individuo  $\mathcal{I}$  al tempo  $t = 0$  riceve un finanziamento di  $S = 5.000$  euro e gli vengono proposte le seguenti due alternative per il rimborso:
- a) versare quattro rate di importo pari a 1.500 euro ai tempi 3, 7, 9, 11 mesi.
  - b) 2 rate da 3.000 euro da versare ai tempi 2 e 4 mesi.

Si dica quale delle due alternative è piú conveniente secondo il criterio del T.I.R.

*Svolgimento*

Osserviamo innanzi tutto che esiste il T.I.R. per entrambe le alternative di rimborso. Si tratta, infatti, di due operazioni di finanziamento e la somma degli importi rimborsati è maggiore del finanziamento ottenuto. Il T.I.R. dell'alternativa di finanziamento descritta al punto a) si ottiene risolvendo la seguente equazione

$$1.500v^{11} + 1.500v^9 + 1.500v^7 + 1.500v^3 = 5.000,$$

dove  $v$  rappresenta il fattore di sconto mensile della legge esponenziale. Si osservi che la base su cui è espresso il fattore di sconto è pari al massimo comun divisore delle epoche di pagamento degli importi che caratterizzano l'operazione finanziaria. Si tratta di un'equazione di undicesimo grado nell'incognita  $v$  che risolveremo col metodo dell'interpolazione lineare. Occorre prima cosa trovare un valore  $v_1$  tale che la funzione  $f(v) = 1.500v^{11} + 1.500v^9 + 1.500v^7 + 1.500v^3$  assuma un valore minore di  $S = 5.000$  e un valore  $v_M$  tale che la funzione  $f(v)$  assuma un valore maggiore di  $S$ . Al valore  $v_M = 0,98$  corrisponde un valore  $f(0,98) = 5.165,6950$ , al valore  $v_1 = 0,97$  corrisponde un valore  $f(0,97) = 4.794,2825$ . Applicando il metodo dell'interpolazione lineare otteniamo

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + (v_M - v_1) \frac{S - f(v_1)}{f(v_M) - f(v_1)} = \\ &= 0,98 + 0,01 \times \frac{5.000 - 4.794,2825}{5.165,6950 - 4.794,2825} = 0,9755 \end{aligned}$$

Risulta  $f(0,9755) = 4.995,0137$ . Se riteniamo accettabile un margine di errore  $\varepsilon = 0,0001$   $v_2$  risulterà un'approssimazione accettabile della soluzione dell'equazione se  $f(v_2 + \varepsilon) > S$ . Poichè  $f(0,9756) = 4.998,7427 < S$ , occorre una nuova iterazione dell'algoritmo e otterremo

$$v_3 = v_2 + (v_M - v_2) \frac{S - f(v_2)}{f(v_M) - f(v_2)} =$$

$$= 0,9755 + (0,98 - 0,9755) \times \frac{5.000 - 4.995,0137}{5.165,6950 - 4.995,0137} = 0,9756.$$

Poichè risulta  $f(v_3 + \varepsilon) = 5.002,4746 > S$ , allora possiamo considerare  $v_3 = 0,9756$  come soluzione approssimata per difetto dell'equazione sopra descritta. Ad essa corrisponde un T.I.R. su base mensile  $i_{12}^* = 0,0250$  (2,5%) e su base annua  $i^* = 34,45\%$ . Per calcolare il T.I.R. dell'alternativa di finanziamento descritta al punto b) occorre risolvere l'equazione

$$3.000v^2 + 3.000v = 5.000$$

dove  $v$  rappresenta il fattore di sconto bimestrale. Risolvendo l'equazione e scartando la soluzione negativa, si ottiene  $v^* = 0,8844$  a cui corrisponde un T.I.R. su base bimestrale  $i_6^* = 0,1307$  (13,07%). Il T.I.R. su base annua è  $i^* = 109\%$  annuo.

Di conseguenza, l'alternativa di finanziamento piú conveniente è quella descritta al punto a).

14. Un individuo  $\mathcal{I}$  stipula in  $t_0 = 0$  un contratto di mutuo per un importo pari a 200.000 euro di cui 100.000 vengono erogati immediatamente e i rimanenti al tempo  $t_2 = 8$  mesi. L'importo viene rimborsato mediante sei rate quadrimestrali posticipate, le prime due costituite solo da interessi relativi alla prima erogazione e calcolati al tasso nominale annuo del 8%. Le rimanenti rate vengono determinate mediante il sistema d'ammortamento francese utilizzando un tasso nominale annuo pari al 8,4%. Compilare il piano d'ammortamento dell'operazione di finanziamento sopra descritta.

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $j_{\text{nom}}(3) = 8\%$  il tasso nominale annuo convertibile tre volte l'anno in base al quale vengono calcolate le rate di preammortamento. Il tasso periodale corrispondente è  $i_3 = j_{\text{nom}}(3)/3 = 0,0267$  (2,67% quadrimestrale). Indichiamo con  $j'_{\text{nom}}(3) = 8,4\%$  il tasso nominale annuo convertibile tre volte l'anno in base al quale vengono calcolate le rimanenti rate. Il tasso periodale corrispondente è  $i'_3 = j'_{\text{nom}}(3)/3 = 0,028$  (2,8% quadrimestrale).

Le prime due rate sono costituite solo da interessi da calcolare sulla base della prima erogazione pari a 100.000 euro. Risulta

$$R_1 = R_2 = i_3 \times 100.000 = 2.670 \quad \text{euro.}$$

Indichiamo con  $R$  l'importo delle rimanenti quattro rate quadrimestrali con le quali si deve rimborsare l'ammontare pari a  $S = 200.000$  euro al tasso  $i'_3$ . Risulta

$$R = \frac{S}{a_{\overline{4}|i'_3}} = \frac{200.000 \times 0,028}{1 - (1,028)^{-4}} = 53.548,3161 \quad \text{euro.}$$

Il piano d'ammortamento è

$k$	$R_k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	0	100.000
1	2.670	2.670	0	100.000
2	2.670	2.670	0	200.000
3	53.548,3161	5.600	47.948,3161	152.051,6839
4	53.548,3161	4.257,4471	49.290,869	102.760,8149
5	53.548,3161	2.877,3028	50.671,0133	52.089,8016
6	53.548,3161	1.458,5144	52.089,8017	$\sim 0$

Si osservi che il debito residuo per i primi due periodi è pari a 100.000 euro e al termine del secondo periodo diventa di 200.000 euro a causa dell'erogazione della seconda parte della somma presa a prestito.

15. Un individuo  $\mathcal{I}$  intende accumulare la somma di  $S=2.000$  euro. A tale scopo ha la possibilità di effettuare versamenti mensili, costanti e anticipati a partire da oggi in un fondo che si rivaluta al tasso d'interesse annuo del 7,5%. Sapendo che  $\mathcal{I}$  è in grado di versare una somma mensile non superiore a 400 euro, determinare il numero minimo di versamenti,  $m$ , necessari alla costituzione della somma  $S$  nonché l'ammontare della rata  $R$  sia in regime esponenziale che in regime lineare.

In regime esponenziale determinare, inoltre, il T.I.R. espresso in forma percentuale e su base annua e calcolare la duration nell'istante attuale, immediatamente prima del versamento della prima rata, dell'operazione finanziaria costituita dal flusso delle  $m$  rate di importo  $R$ .

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $i$  il tasso d'interesse annuo pari al 7,5%. Poiché consideriamo versamenti mensili, dobbiamo utilizzare un tasso d'interesse espresso su base mensile,

$$i_{12} = (1 + i)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,006 \quad (0,6\% \quad \text{in regime esponenziale}),$$

mentre in regime lineare  $i'_{12} = i/12 = 0,625\%$ . Il massimo importo che  $\mathcal{I}$  è in grado di pagare mensilmente è pari a 400 euro. Tenendo conto che i versamenti vengono effettuati all'inizio di ogni mese, si deve far riferimento al montante di una rendita anticipata.

Avremo quindi in regime esponenziale

$$400\ddot{s}_{\overline{m}|i_{12}} = S \quad \text{cioè} \quad 400(1,006)^{\frac{[1,006^m - 1]}{0,006}} = 2.000.$$

Risolvendo rispetto all'incognita  $m$  si ottiene  $m = 4,9088$  mesi. Poiché il numero dei versamenti deve essere intero, allora si considera  $\lceil m \rceil = 5$  mesi. La rata da versare all'inizio di ogni mese ha importo

$$R = \frac{S}{\ddot{s}_{\overline{m}|i_{12}}} = \frac{2.000 \times 0,006}{1,006(1,006^5 - 1)} = 393,4426 \quad \text{euro}.$$

Nel caso si consideri il regime lineare avremo dopo  $m$  periodi

$$[400 + m \times i'_{12} \times 400] + [400 + (m - 1) \times i'_{12} \times 400] + \dots \\ \dots + [400 + (m - (m - 1)) \times i'_{12} \times 400] = S,$$

da cui

$$400m + 400i'_{12} \sum_{k=1}^m k = 400m + 400 \frac{m(m+1)}{2} i'_{12} = \\ = 400 \left[ m + \frac{m(m+1)}{2} i'_{12} \right] = S,$$

cioè

$$200i'_{12}m^2 + (200i'_{12} + 400)m - S = 0 \quad (*).$$

Risolvendo (\*) rispetto ad  $m$  si ottiene  $m = 4,9093$  mesi. Poichè il numero dei versamenti deve essere intero, allora si considera  $\lceil m \rceil = 5$  mesi.

La rata da versare ipotizzando una legge di capitalizzazione lineare si ottiene risolvendo rispetto a  $R$  l'equazione

$$R \left( 5 + \frac{5 \times 6}{2} 0,00625 \right) = 2000,$$

da cui  $R = 392,6380$  euro.

Il tasso interno di rendimento dell'operazione finanziaria sopra descritta coincide con il tasso d'interesse utilizzato nel calcolo della rata essendo l'operazione finanziaria equa per costruzione. Risulta quindi  $i^* = 7,5\%$  annuo. Per semplicità ipotizziamo che l'istante attuale coincida con l'origine dei tempi, cioè sia  $t = 0$ . La duration della rendita anticipata di rata  $R$  calcolata in  $t = 0$  è data da

$$D(0, \mathbf{r}) = \frac{\sum_{k=0}^4 k(1 + i_{12}^*)^{-k}}{\sum_{k=0}^4 (1 + i_{12}^*)^{-k}} = 1,9880 \quad \text{mesi.}$$

16. A partire da cinque anni fa un individuo  $\mathcal{I}$  ha effettuato cinque versamenti anticipati annui pari a 2.000 euro in un fondo che si è rivalutato al tasso d'interesse annuo composto del 7%. La somma accumulata viene versata oggi come acconto per l'acquisto di un appartamento del valore di 40.000 euro. La parte rimanente,  $S$ , viene rimborsata tramite un mutuo che prevede versamenti immediati, semestrali, costanti e posticipati al tasso d'interesse nominale annuo del 9%. Sapendo che  $\mathcal{I}$  non è in grado di pagare una rata semestrale superiore a 5.000 Euro, determinare il numero minimo di versamenti necessari per estinguere il debito  $S$  ed il relativo ammontare. Redigere, infine, il piano d'ammortamento del debito  $S$ .

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $t_0 = 0$  l'istante di tempo in corrispondenza del quale viene effettuato il primo versamento pari a 2.000 euro. Un anno dopo il quinto versamento, cioè all'istante  $t_5 = 5$  anni, il valore della somma accumulata è

$$\begin{aligned} W(5, \mathbf{r}) &= 2.000 \ddot{s}_{5|0,07} = \\ &= 2.000(1,07) \frac{[(1,07)^5 - 1]}{0,07} = 12.306,5815 \quad \text{euro.} \end{aligned}$$

Tale somma viene versata interamente quale acconto per l'acquisto di un appartamento dal valore di 40.000 euro. La rimanente parte da rimborsare è quindi pari a  $S = 27.693,4185$  euro. Essendo i versamenti effettuati con cadenza semestrale dobbiamo utilizzare il tasso semestrale  $i_2 = j_{\text{nom}}(2)/2 = 0,045$  (4,5% semestrale). Sapendo che l'individuo  $\mathcal{I}$  non è in grado di pagare una rata di ammontare superiore a 5.000 euro, il numero di versamenti da effettuare si ottiene dalla relazione

$$S = Ra_{\overline{m}|0,045} \quad \text{da cui} \quad m = 6,5115 \quad \text{semestri.}$$

Poichè il numero dei versamenti deve essere un numero intero, allora si considera  $\lceil m \rceil = 7$  semestri. L'ammontare della rata  $R$  da versare è

$$R = \frac{S}{a_{\overline{m}|0,045}} = \frac{27.693,4185 \times 0,045}{1 - (1,045)^{-7}} = 4.699,6138 \quad \text{euro.}$$

Il piano d'ammortamento è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	27.693,4185
1	1.246,2038	3.453,4099	24.240,0086
2	1.090,8004	3.608,8134	20.631,1952
3	928,4038	3.771,21	16.859,9852
4	758,6993	3.940,9144	12.919,0707
5	581,3582	4.118,2556	8.800,8152
6	396,0367	4.303,5771	4.497,2381
7	202,3757	4.497,2381	0

17. Devo acquistare oggi un computer il cui prezzo è di 2.000 euro. Mi vengono proposte le seguenti modalità di pagamento in tre anni (la vita a scadenza dell'operazione è tre anni) al tasso d'interesse nominale annuo del 10%:

- 1) pagamento fra tre anni di un importo pari al 20% del prezzo attuale del computer pagando la rimanente parte mediante sei versamenti semestrali, immediati e posticipati a quota capitale costante;
  - 2) pagamento in un'unica soluzione fra tre anni con corrispondenza di interessi semestrali immediati e posticipati.
- a) Redigere il piano d'ammortamento relativo alla modalità 1) e il piano d'ammortamento relativo alla modalità 2).
  - b) Determinare il T.I.R., esprimendolo in forma percentuale e su base annua, dell'operazione finanziaria di acquisto del computer con la modalità di pagamento 1) e dell'operazione finanziaria di acquisto del computer con la modalità di pagamento 2).
  - c) Dire, motivando la risposta, quale delle due alternative è più conveniente.

*Svolgimento*

a) Indicato con  $j_{\text{nom}}(n) = 0,10$  il tasso nominale annuo convertibile  $n$  volte l'anno, il tasso semestrale è dato da  $i_2 = j_{\text{nom}}(2)/2 = 0,05$  (5% semestrale).

Poichè la somma di 400 euro verrà pagata fra tre anni, il valore attuale dell'importo da rimborsare mediante le sei rate semestrali posticipate è

$$S = 2.000 - 400(1,05)^{-6} = 1.701,5138 \text{ euro.}$$

Il sistema d'ammortamento utilizzato per rimborsare la somma  $S$  è a quota capitale costante di importo pari a

$$C = \frac{S}{m} = \frac{1.701,5138}{6} = 283,5856 \text{ euro.}$$

Il piano d'ammortamento è il seguente

$k$	$I_k$	$R_k$	$M_k$
0	0	0	1.701,5138
1	85,0757	368,6613	1.417,9282
2	70,8964	354,482	1.134,3426
3	56,7171	340,3027	850,757
4	42,5379	326,1235	567,1714
5	28,3586	311,9442	283,5858
6	14,1793	297,7649	$\sim 0$

Il piano d'ammortamento con versamento del capitale in un'unica soluzione e pagamento periodico degli interessi è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$R_k$	$M_k$
0	0	0	0	2.000
1	100	0	100	2.000
2	100	0	100	2.000
3	100	0	100	2.000
4	100	0	100	2.000
5	100	0	100	2.000
6	100	2.000	2.100	0

- b) Il tasso interno di rendimento delle due operazioni finanziarie coincide con il tasso d'interesse utilizzato nel calcolo delle rate essendo le due operazioni finanziarie eque per costruzione. Quindi il T.I.R su base semestrale è pari a  $i_2^* = 5\%$  e su base annua

$$i^* = (1 + i_2^*)^2 - 1 = 0,1025 \quad (10,25\% \text{ annuo}).$$

- c) In base al criterio del T.I.R. le due operazioni finanziarie hanno uguale convenienza.

18. Un individuo  $\mathcal{I}$  intende contrarre un mutuo di 10.000 euro da rimborsare in 3 anni mediante rate costanti, semestrali, posticipate. Si rivolge presso un istituto di credito che gli propone le seguenti alternative:

- 1) rimborsare la somma ricevuta al tasso fisso del 5,5%;
- 2) rimborsare la somma ricevuta utilizzando per il primo anno un tasso d'interesse del 3% e, successivamente, un tasso d'interesse del 6%

Determinare:

- a) la rata delle due alternative di finanziamento;
- b) il finanziamento piú conveniente per  $\mathcal{I}$  in base al T.I.R.;
- c) il piano d'ammortamento relativamente all'alternativa (1).

*Svolgimento*

- a) Indichiamo con  $i = 5,5\%$  il tasso d'interesse annuo applicato nell'alternativa di rimborso (1). Poichè le rate sono semestrali dobbiamo utilizzare il tasso semestrale equivalente ad  $i$  uguale a  $i_2 = (1 + i)^{1/2} - 1 = 0,0271$  (2,71% semestrale). La rata si ottiene dalla relazione

$$R = \frac{S}{a_{\overline{m}|i_2}} = \frac{10.000 \times 0,0271}{1 - 1,0271^{-6}} = 1.828,2710 \text{ euro.}$$

Indichiamo con  $i' = 3\%$  il tasso d'interesse applicato nel primo anno relativamente all'alternativa di rimborso (2). Ad esso corrisponde il tasso semestrale  $i'_2 = 0,0149$  (1,49% semestrale) ed il fattore di sconto semestrale  $v'_2 = 0,9853$ . Indichiamo con  $i'' = 6\%$  il tasso applicato a partire dal secondo anno relativamente all'alternativa di finanziamento (2) a cui corrisponde un tasso semestrale  $i''_2 = 0,0296$  (2,96% semestrale) e un fattore di sconto semestrale  $v''_2 = 0,9713$ . La rata si ottiene dalla relazione

$$S = R(v'_2 + v'^2_2 + v'^2_2 v''_2 + v'^2_2 v''^2_2 + v'^2_2 v''^3_2 + v'^2_2 v''^4_2) \quad \text{da cui}$$

$$R = 1.795,7710 \text{ euro.}$$

- b) Il T.I.R. dell'alternativa di finanziamento (1) coincide con il tasso d'interesse utilizzato nel calcolo della rata trattandosi di un'operazione finanziaria equa per costruzione e, di conseguenza,  $i^* = 5,5\%$  annuo. Per quanto riguarda l'alternativa (2) dobbiamo tener conto del cambio del tasso d'interesse e quindi per calcolare il T.I.R. occorre utilizzare un metodo numerico per il calcolo della soluzione in via approssimata dell'equazione

$$S = f(v) = R \frac{v(1 - v^6)}{1 - v} \quad (a).$$

Preliminarmente osserviamo che il T.I.R. esiste in quanto  $S < 6R$ . Utilizzando il metodo dell'interpolazione lineare occorre determinare un valore  $v_M$  tale che  $f(v_M) > S$  ed un valore  $v_1$  tale che  $f(v_1) < S$ . Poiché il T.I.R. della seconda alternativa di finanziamento è certamente compreso tra il tasso del 3% e quello del 6%, la soluzione  $v^*$  dell'equazione (a) può essere cercata nell'intervallo  $(\frac{1}{1,06}, \frac{1}{1,03})$ . Posto  $v_M = 0,9853$  si ottiene  $f(0,9853) = 10.233,6555 > S$ , mentre per  $v_1 = 0,9713$  si ha  $f(0,9713) = 9.742,6251 < S$ . Ricordando l'algoritmo di calcolo della soluzione dell'equazione di cui sopra

$$v_{n+1} = v_n + (v_M - v_n) \frac{S - f(v_n)}{f(v_M) - f(v_n)}$$

otteniamo un valore  $v_2 = 0,9786$  a cui corrisponde un valore  $f(v_2) = 9.995,7823$ . Se riteniamo accettabile un livello di tolleranza  $\varepsilon = 0,0001$ , per stabilire se il valore  $v_2$  ottenuto rappresenta una soluzione accettabile dobbiamo verificare che  $f(v_2 + \varepsilon) > S$ . Poiché  $f(0,9787) = 9.999,2935$ ,  $v_2$  non può essere accettata quale soluzione dell'equazione (a). Reiterando l'algoritmo numerico otteniamo un valore  $v_3 = 0,9787$  a cui corrisponde un valore  $f(0,9787) = 9.999,2935$ . Poiché  $f(v_3 + \varepsilon) = 10.002,8058 > S$ , allora  $v_3$  può essere considerata soluzione dell'equazione (a) in quanto "buona" approssimazione. Ad essa corrisponde un tasso d'interesse  $i_2^* = 0,021764$  (2,1764% semestrale) ed un tasso annuo  $i^* = 4,4\%$ . In base al criterio del T.I.R. possiamo concludere che la seconda alternativa di finanziamento è più conveniente.

c) Il piano d'ammortamento dell'alternativa di finanziamento (1)  
è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	10.000
1	271	1.557,2710	8.442,7290
2	228,7980	1.599,4730	6.843,2560
3	185,4522	1.642,8187	5.200,4372
4	140,9318	1.687,3392	3.513,0980
5	95,2050	1.733,0660	1.780,0320
6	48,2389	1.780,0320	0

19. Un individuo  $\mathcal{I}$  intende acquistare un'automobile che costa 22.000 euro e ha a disposizione le due seguenti alternative:

- 1) versamento immediato di un importo pari al 30% del costo dell'automobile. Versamento di 36 rate mensili posticipate al tasso annuo dell'8% di cui le prime 35 pari a 314 euro e la 36-esima rata pari al valore residuo dell'automobile;
- 2) versamento immediato di un importo pari al 50% del costo dell'automobile e pagamento di 24 rate immediate mensili posticipate di 600 euro.

Determinare:

- a) l'importo della 36-esima rata dell'alternativa di finanziamento 1);
- b) il T.I.R. dell'alternativa 1) nel caso in cui la 36-esima rata sia pari a 4.410 euro;
- c) dire quale delle due alternative è piú conveniente e perchè in base al criterio del T.I.R.;
- d) relativamente all'alternativa 2) e limitatamente ai primi 6 versamenti, costruire il piano di ammortamento.

*Svolgimento*

Indichiamo con  $i = 8\%$  il tasso d'interesse utilizzato nella proposta di finanziamento (1) e con  $i_{12} = 0,64\%$  il tasso mensile equivalente.

- a) L'ammontare della rata  $R$  da versare dopo tre anni si ottiene dalla relazione

$$22.000(1 - 0,3) = 314a_{\overline{35}|i_{12}} + R(1 + i)^{-3} \quad \text{da cui}$$

$$R = 7.031,5863 \quad \text{euro.}$$

- b) Poichè  $6.600 + (35 \times 314) + 4.410 = 22.000$ , il T.I.R. della proposta di finanziamento (1) nel caso in cui l'ultima rata sia uguale a 4.410 è uguale a 0.

- c) Per determinare quale delle due proposte di finanziamento è preferita occorre determinare il T.I.R. della proposta (2) essendo quello della proposta (1) uguale all'8% annuo. Al fine di individuare il T.I.R. scriviamo la condizione di equità:

$$0 = 11.000 - f(v) = 11.000 - 600 \frac{v(1 - v^{24})}{1 - v} \quad (*).$$

Osserviamo preliminarmente che il T.I.R. esiste in quanto  $11.000 < 600 \times 24$ . Dovendo risolvere un'equazione di 24° grado occorre utilizzare un metodo numerico per determinare l'unica soluzione positiva minore di 1. Utilizzando il metodo dell'interpolazione lineare occorre determinare un valore  $v_M$  tale che  $f(v_M) > S = 11.000$  ed un valore  $v_1$  tale che  $f(v_1) < S$ . La scelta di  $v_M = 0,98$  a cui corrisponde un valore  $f(0,98) = 11.296,0581$  e  $v_1 = 0,97$  a cui corrisponde  $f(0,97) = 10.060,5059$  ci consente di utilizzare l'algoritmo di calcolo:

$$v_{n+1} = v_n + (v_M - v_n) \frac{S - f(v_n)}{f(v_M) - f(v_n)},$$

al fine di determinare la soluzione della (\*). Al primo passo,  $n = 1$ , otteniamo un valore  $v_2 = 0,9776$  a cui corrisponde un valore  $f(v_2) = 10.982,5827$ .

Se riteniamo accettabile un livello di tolleranza  $\varepsilon = 0,0001$ , il valore  $v_2$  precedentemente ottenuto rappresenta una soluzione accettabile se  $f(v_2 + \varepsilon) > S$ .

Poichè  $f(0,9777) = 10.995,4215$ ,  $v_2$  non può essere considerata una "buona" approssimazione della soluzione. Occorre quindi reiterare il procedimento e si ottiene un valore  $v_3 = 0,9777$  a cui corrisponde il valore  $f(v_3) = 10.995,4215$ . Poichè  $f(v_3 + \varepsilon) = 11.008,2794$ ,  $v_3$  o  $v_3 + \varepsilon$  sono "buone" approssimazioni della soluzione di (\*). In particolare, il T.I.R. su base mensile sarà certamente maggiore del tasso  $i_{12}^* = \frac{1}{v_3 + \varepsilon} - 1 = \frac{1}{0,9778} - 1 = 0,0227$ , (2,27% mensile) e minore del tasso  $i_{12}^* = \frac{1}{v_3} - 1 = \frac{1}{0,97787} - 1 = 0,0228$ , (2,28% mensile). Cosicché il T.I.R. su base annua sarà maggiore del tasso  $i^* = (1 + i_{12}^*)^{12} - 1 = 0,3091$ , (30,91% annuo) e minore del tasso  $i^* = (1 + i_{12}^*)^{12} - 1 = 0,3107$ , (31,07% annuo). In base al criterio del T.I.R. possiamo concludere che l'alternativa

di finanziamento (1) è piú conveniente in quanto il tasso d'interesse ad essa relativo è inferiore a quello dell'alternativa di finanziamento (2).

- d) Il piano d'ammortamento dell'alternativa di finanziamento (2) per i primi sei periodi è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	11.000.000
1	250.800	349.200	10.650.800
2	242.834,24	357.161,76	10.293.638,24
3	234.694,9519	365.305,0481	9.928.333,192
4	226.365,9968	373.634,0032	9.554.699,189
5	217.847,1415	382.152,8585	9.172.546,331
6	209.134,0563	390.865,9437	8.781.680,387

20. Determinare il tasso interno di rendimento (su base annua ed in forma percentuale) dei seguenti titoli:

- a) un titolo a cedola fissa trimestrale emesso alla pari al tasso nominale del 4% annuo con valore facciale  $C = 100$  euro e scadenza 5 anni;
- b) un titolo a cedola nulla emesso al prezzo  $P = 1.257$  euro con valore facciale 2.000 euro e scadenza 3 anni e 3 mesi.

*Svolgimento*

- a) Sia  $j_{\text{nom}}(n)$  il tasso nominale annuo convertibile  $n$  volte l'anno. Per calcolare l'importo della cedola trimestrale  $I$  occorre determinare il valore del tasso d'interesse trimestrale

$$i_4 = j_{\text{nom}}(4)/4 = 1\%.$$

L'importo della cedola è uguale a  $I = i_4 \times C = 1$  euro. Ricordando che il tasso interno di rendimento di un titolo a cedola fissa emesso alla pari è uguale al tasso cedolare si ha

$$i_4^* = \frac{I}{C} = 0,01 \quad (1\% \quad \text{quadrimestrale}).$$

Il T.I.R. espresso su base annua è dato da

$$i^* = (1 + i_4^*)^4 - 1 = 0,0406 \quad (4,06\% \quad \text{annuo}).$$

- b) Indicando con  $v_4$  il fattore di sconto della legge esponenziale espresso su base trimestrale, il T.I.R. del titolo a cedola nulla con scadenza 3 anni e tre mesi (13 trimestri) è ricavabile da

$$P = Cv_4^{13} \quad \text{da cui} \quad v_4^* = \left(\frac{P}{C}\right)^{\frac{1}{13}} = 0,9649.$$

Il T.I.R. su base trimestrale risulta quindi

$$i_4^* = \frac{1}{v_4^*} = 0,0364 \quad (3,64\% \quad \text{trimestrale}).$$

Il T.I.R. su base annua è

$$i^* = (1 + i_4^*)^4 - 1 = 0,1537 \quad (15,37\% \quad \text{annuo}).$$

21. Si consideri un titolo a cedola fissa emesso al tempo  $t = 0$  con valore facciale  $C = 1.000$  euro, scadenza 10 anni e cedole semestrali calcolate al tasso nominale annuo del 4%. Supponendo che il titolo

- a) sia emesso alla pari,
- b) sia emesso sopra la pari al prezzo  $P = 1.050$  euro,
- c) sia emesso sotto la pari al prezzo  $P = 950$  euro,

determinare il T.I.R. nei diversi casi.

*Svolgimento*

Indicato con  $i$  il tasso d'interesse semestrale, nei diversi casi, occorre risolvere l'equazione (per  $i > -1$ )

$$P = I \sum_{k=1}^{20} (1+i)^{-k} + C(1+i)^{-20}, \quad (*)$$

essendo  $I = j_{\text{nom}}(2)/2 \times C = 0,02 \times 1.000 = 20$  euro.

L'equazione (\*) ha un'unica soluzione strettamente positiva in quanto  $P < \sum_{k=1}^{20} I + C$ . Ricordando che (\*) è equivalente (per  $i \neq 0$ ) alla

$$i = \frac{I}{P} + \frac{C - P}{P} \frac{1}{\sum_{k=0}^{19} (1+i)^k},$$

abbiamo:

a) essendo  $P = C$ , il T.I.R. su base semestrale è pari al tasso cedolare, vale a dire al 2%. Su base annua  $i^* = 0,0404$  (4,04% annuo).

b) Il T.I.R. su base semestrale è compreso tra

$$i_1 = \frac{I}{P} + \frac{C - P}{P} \frac{1}{20} = \frac{20}{1050} - \frac{50}{1050} \frac{1}{20} = 0,0167$$

e  $i_M = I/P = 0,0191$ . Procedendo per interpolazione lineare, posto

$$f(i) = I \sum_{k=1}^{20} (1+i)^{-k} + C(1+i)^{-20},$$

avremo

$$i_2 = i_M - \frac{P - f(i_M)}{f(i_1) - f(i_M)}(i_M - i_1).$$

Essendo  $f(i_1) = 1.056,2413$  e  $f(i_M) = 1015,6772$ , avremo  $i_2 = 0,0169$ . Al fine di verificare se  $i_2$  è una buona approssimazione (per eccesso con margine di errore  $\varepsilon = 0,0001$ ) della soluzione di (\*), consideriamo  $i_2 - \varepsilon = 0,0168$  e calcoliamo  $f(i_2 - \varepsilon) = 1.053,7683$ . Poichè  $f(i_2 - \varepsilon) > P$  è possibile concludere che il T.I.R. su base semestrale è compreso tra 0,0168 e 0,0169.

c) Il T.I.R. su base semestrale risulta compreso tra  $i_1 = I/P = 0,0211$  e

$$i_M = \frac{I}{P} + \frac{C - P}{P}120 = 0,0237$$

a cui corrispondono i valori  $f(i_1) = 983,0037$  e  $f(i_M) = 941,91$ . Procedendo col metodo dell'interpolazione lineare otteniamo

$$i_2 = i_M - \frac{P - f(i_M)}{f(i_1) - f(i_M)}(i_M - i_1) = 0,0232.$$

Al fine di verificare se  $i_2$  è una buona approssimazione (per difetto con margine di errore  $\varepsilon = 0,0001$ ) della soluzione di (\*), consideriamo  $i_2 - \varepsilon = 0,0231$  e calcoliamo  $f(i_2 - \varepsilon) = 951,4112$ . Risulta quindi che  $i_2 - \varepsilon$  è un'approssimazione per difetto del T.I.R. semestrale del titolo, mentre  $i_2 = 0,0232$  è un'approssimazione per eccesso con lo stesso livello di tolleranza  $\varepsilon = 0,0001$ .

22. Un individuo  $\mathcal{I}$  ha a disposizione la somma  $S = 1.000$  euro e deve valutare le seguenti alternative d'investimento:
- a) acquistare un titolo a cedola nulla al prezzo  $P = 1.000$  euro con scadenza sei mesi e valore facciale 1.100 euro;
  - b) depositare per sei mesi la somma in un conto corrente remunerato al tasso mensile composto dell'1%;
  - c) depositare la somma nel conto corrente di cui al punto b) e utilizzare la somma accumulata per l'acquisto di un contratto a termine con prezzo pattuito oggi, pagamento tra tre mesi di un importo pari a 1.030,301 euro e valore facciale 1.100 euro da rimborsare tra sei mesi.

Dire quale delle tre alternative di investimento è piú conveniente.

### *Svolgimento*

Poichè le tre alternative d'investimento prevedono tutte lo stesso esborso iniziale e hanno tutte la stessa durata, per determinare quale delle tre è piú conveniente basta verificare quale delle tre produce un montante maggiore dopo sei mesi.

L'alternativa (a) consente di ottenere un montante pari a 1.100 euro.

L'alternativa (b) fornisce un montante pari a  $1.000(1,01)^6 = 1.061,5202$  euro. L'alternativa (c) consente di ritirare dopo tre mesi la somma  $1.000(1,01)^3 = 1.030,301$  euro da utilizzare per pagare il prezzo previsto dal contratto a termine e ottenere il capitale di 1.100 euro dopo sei mesi. Risulta che l'alternativa (b) è quella meno conveniente essendo (a) e (c) equivalenti.

23. Un individuo  $\mathcal{I}$  intende acquistare un'automobile il cui prezzo è pari a  $P=2.000$  euro e ha a disposizione la seguente possibilità di pagamento: versamento immediato di una somma pari al 20% del prezzo dell'auto, versamento di 8 rate trimestrali immediate posticipate di importo  $R$  e, infine, versamento finale fra due anni di un importo pari al 40% del prezzo  $P$  dell'automobile. Ipotizzando una sottostante legge di capitalizzazione composta con tasso d'interesse annuo pari all'8%, determinare l'ammontare della rata  $R$ . Determinare, inoltre, all'istante attuale la scadenza media aritmetica e la duration dell'operazione finanziaria costituita dalla riscossione delle 8 rate trimestrali di importo pari a  $R$ .

### *Svolgimento*

Indichiamo con  $i = 8\%$  il tasso d'interesse annuo utilizzato nella proposta di finanziamento. Poiché vengono pagate rate trimestrali dobbiamo calcolare il tasso trimestrale equivalente uguale a  $i_4 = 1,94\%$ . L'ammontare della rata  $R$  deve essere tale da soddisfare la condizione

$$2.000 - 0,2 \times 2.000 - 0,4 \times 2.000(1,08)^{-2} = Ra_{8|i_4}$$

da cui si ottiene  $R = 124,4644$  euro. La scadenza media aritmetica dell'operazione di rendita costituita dalla sola riscossione delle rate di importo  $R$  è data da

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^8 kR}{\sum_{k=1}^8 R} = \frac{\sum_{k=1}^8 k}{\sum_{k=1}^8 1} = \frac{\frac{8 \times 9}{2}}{8} = \frac{9}{2} = 4,5 \quad \text{trimestri.}$$

La duration della rendita  $\mathbf{r}$  di rata  $R$  calcolata in  $t_0 = 0$  è data da

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{r}) &= \frac{1 + i_4}{i_4} - \frac{m}{(1 + i_4)^m - 1} = \\ &= \frac{1,0194}{0,0194} - \frac{8}{1,0194^8 - 1} = 4,3992 \quad \text{trimestri.} \end{aligned}$$

24. Sia

$$\begin{aligned} i(0, 0.5) &= 4,92\%, & i(0, 1) &= 5,2\%, \\ i(0, 1.5) &= 5,36\%, & i(0, 2) &= 5,56\% \end{aligned}$$

la struttura per scadenza dei tassi a pronti del mercato al tempo  $t_0 = 0$ , essendo il tempo misurato in anni ed i tassi espressi su base annua.

- a) Calcolare la duration  $D(0, \mathbf{x})$ , rispetto alla struttura assegnata, di un B.T.P. emesso all'epoca  $t_0 = 0$ , con cedola semestrale, tasso annuo nominale del 10%, durata biennale e valore facciale 200 euro.
- b) Determinare quante quote di un B.O.T. con valore facciale 100 euro e con scadenza 0,5 anni bisogna aggiungere al B.T.P. in modo che la duration del portafoglio sia pari a 1,1 anni.

*Svolgimento*

a) Il tasso nominale annuo convertibile  $n$  volte l'anno è  $j_{\text{nom}}(n) = 10\%$ . Il tasso semestrale è  $i_2 = j_{\text{nom}}(2)/2 = 5\%$ . L'importo della cedola semestrale risulta essere pari a  $I = i_2 \times 200 = 10$  euro. Il valore della duration del B.T.P. si ottiene dalla seguente formula

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^m t_k x_k v(0, t_k)}{\sum_{k=1}^m x_k v(0, t_k)} = \\ &= \frac{10(1,0492)^{-0.5} + 20(1,052)^{-1} + 30(1,0536)^{-1.5} + 840(1,0556)^{-2}}{10(1,0492)^{-0.5} + 10(1,052)^{-1} + 10(1,0536)^{-1.5} + 210(1,0556)^{-2}} = \\ &= \frac{810,3565}{216,9757} = 3,7348 \quad \text{semestri.} \end{aligned}$$

- b) La duration di un portafoglio composto da  $n$  titoli ciascuno caratterizzato da un flusso di importi  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})$ ,  $i = 1, \dots, n$  e con quote di composizione  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  è data dalla media aritmetica ponderata delle singole duration

$$D(0, \alpha \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{W(0, \mathbf{x}_k)}{W(0, \alpha \mathbf{x})} D(0, \mathbf{x}_k).$$

Per calcolare la duration del portafoglio con quote di composizione  $\alpha = (1, \alpha_2)$  occorre innanzi tutto calcolare il valore in  $t_0 = 0$  del B.O.T. con scadenza  $t = 0,5$  anni. Risulta  $W(0, 100) = 100(1,0492)^{-0,5} = 97,6272$  euro. Il valore attuale del B.T.P. è 216,9757 euro. Nel nostro caso la duration del portafoglio, espressa in semestri, è

$$\frac{216,9757 \times 3,7348 + 97,6272\alpha_2}{216,9757 + 97,6272\alpha_2} = 2,2 \quad (*).$$

Risolvendo l'equazione (\*) rispetto all'incognita  $\alpha_2$  si ottiene che il numero delle quote è pari 2,8426.

25. Sia:

$$\begin{aligned}i(0, 0.5) &= 3,3\%, & i(0, 1) &= 3,6\%, \\i(0, 1.5) &= 4\%, & i(0, 2) &= 4,2\%\end{aligned}$$

la struttura dei tassi a pronti del mercato al tempo  $t_0 = 0$ , essendo il tempo misurato in anni ed i tassi espressi su base annua.

- a) determinare la struttura per scadenza dei tassi a termine implicita nella struttura dei tassi a pronti assegnata;
- b) calcolare la duration  $D(0, \mathbf{x})$ , rispetto alla struttura assegnata, di un B.T.P. emesso al tempo  $t_0 = 0$ , con cedola semestrale, tasso annuo nominale del 3,8%, durata 2 anni e valore facciale 200 euro;
- c) determinare quante quote di un B.O.T. con valore facciale 100 euro e scadenza 1 anno bisogna aggiungere al B.T.P. in modo tale che la duration del portafoglio sia di 1,2 anni;
- d) determinare il tasso d'interesse annuo equivalente, in regime lineare, a  $i(0, 0.5)$  (giustificare i calcoli).

*Svolgimento*

- a) Considerato un mercato strutturato al tempo  $t_0$  su  $m$  periodi con scadenze  $t_1, \dots, t_m$ , ricordiamo che i tassi d'interesse a termine impliciti nella struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti si ottengono dalla seguente relazione di consistenza

$$[1 + i(t_0; t_{k-1}, t_k)]^{t_k - t_{k-1}} [1 + i(t_0, t_k)]^{t_{k-1} - t_0} = [1 + i(t_0, t_k)]^{t_k - t_0}$$

da cui

$$i(t_0; t_{k-1}, t_k) = [1 + i(t_0, t_k)] \left[ \frac{1 + i(t_0, t_k)}{1 + i(t_0, t_{k-1})} \right]^{\frac{t_{k-1} - t_0}{t_k - t_{k-1}}} - 1.$$

Di conseguenza avremo  $i(0; 0, 0.5) = i(0, 0.5) = 3,3\%$ ,

$$i(0; 0.5, 1) = 1,036 \left( \frac{1,036}{1,033} \right) - 1 = 0,039 \quad (3,9\% \text{ annuo})$$

$$i(0; 1, 1.5) = 1,04 \left( \frac{1,04}{1,036} \right)^{\frac{1}{0,5}} - 1 = 0,0481 \quad (4,81\% \text{ annuo})$$

$$i(0; 1.5, 2) = 1,042 \left( \frac{1,042}{1,04} \right)^{\frac{1,5}{0,5}} - 1 = 0,048 \quad (4,8\% \text{ annuo}).$$

- b) Il B.T.P. emesso alla pari valore facciale  $C = 200$  euro ha cedola pari a  $I = i_2 C = 0,019 \times 200 = 3,8$  euro. La duration, misurata in semestri, è

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^m t_k x_k v(0, t_k)}{\sum_{k=1}^m x_k v(0, t_k)} = \\ &= \frac{3,8(1,033)^{-0,5} + (2 \times 3,8)(1,036)^{-1} + (3 \times 3,8)(1,04)^{-1,5} + (4 \times (3,8 + 200))(1,042)^{-2}}{3,8(1,033)^{-0,5} + 3,8(1,036)^{-1} + 3,8(1,04)^{-1,5} + 203,8(1,042)^{-2}} = \\ &= \frac{772,6311}{198,6916} = 3,8886 \quad \text{semestri.} \end{aligned}$$

- c) Occorre innanzi tutto determinare il valore attuale del B.O.T. con scadenza annuale che è uguale a

$$W(0, 100) = 100(1,036)^{-1} = 96,5251 \quad \text{euro.}$$

Il valore attuale del B.T.P. è 198,6916 euro. La duration del portafoglio è data da

$$D(0, \alpha \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_i \frac{W(0, \mathbf{x}_i)}{W(0, \alpha \mathbf{x})} D(0, \mathbf{x}_i).$$

Nel nostro caso si ottiene

$$\frac{\alpha \times 2 \times 96,5251 + 3,8886 \times 198,6916}{\alpha \times 96,5251 + 198,6916} = 2,4 \quad \text{semestri.}$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'incognita  $\alpha$ , che rappresenta il numero delle quote del B.O.T. detenute nel portafoglio, si ottiene  $\alpha = 7,6605$ .

- d) Per determinare il tasso annuo equivalente a  $i(0, 0.5)$  in capitalizzazione lineare occorre per prima cosa ricordare che il tasso  $i(0, 0.5)$  è riferito ad un'operazione finanziaria elementare con vita a scadenza un semestre e quindi esprimere il tasso d'interesse su base semestrale. Abbiamo così che

$i_2 = 1,033^{1/2} - 1 = 0,0164$  è il tasso semestrale equivalente a  $i(0,0.5)$  in regime esponenziale. Il tasso annuo equivalente in regime lineare è  $i = 2i_2 = 0,0328$  (3,28% annuo).

26. Nel mercato dei titoli di Stato sono presenti tre T.C.N. con valore facciale 200 euro e vita a scadenza e prezzo specificati nella tabella seguente

vita a scadenza	prezzo
18 giorni	199,38 euro
79 giorni	197,14 euro
139 giorni	194,64 euro

Nell'ipotesi che nel mercato non sia possibile realizzare arbitraggi non rischiosi, determinare la struttura per scadenza dei prezzi a pronti  $v(t_0, t_k)$ , e dei prezzi a termine impliciti  $v(t_0; t_{k-1}, t_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$  sullo scadenziario  $\{t_0, t_1, t_2, t_3\} = \{0, 18, 79, 139\}$  giorni. Determinare inoltre la struttura per scadenza dei tassi a pronti e a termine corrispondente a quella dei prezzi sopra calcolati esprimendo i tassi d'interesse su base annua ed in forma percentuale e facendo riferimento all'anno solare (365 gg).

Dire inoltre se il prezzo a termine  $v(t_0; t_1, t_3) = 0,9867$  euro di un T.C.N. unitario consente o meno arbitraggi non rischiosi, motivando la risposta, e, in caso affermativo, determinare l'eventuale profitto da arbitraggio specificando l'epoca di realizzo.

### *Svolgimento*

Per il teorema di indipendenza dall'importo, la struttura dei prezzi a pronti si ottiene dalla seguente relazione

$$v(t_0, t_k) = \frac{V(t_0, x_k)}{x_k}.$$

La struttura dei prezzi a pronti risulta essere

$$v(t_0, t_1) = \frac{199,38}{200} = 0,9969, \quad v(t_0, t_2) = \frac{197,14}{200} = 0,9857,$$

$$v(t_0, t_3) = \frac{194,64}{200} = 0,9732.$$

La struttura per scadenza dei prezzi impliciti si ottiene da quella dei prezzi a pronti sfruttando la proprietà di esclusione di arbitraggi non rischiosi

$$v(t_0; t_{k-1}, t_k) = \frac{v(t_0, t_k)}{v(t_0, t_{k-1})}.$$

Risulta

$$v(t_0; t_0, t_1) = v(t_0, t_1) = 0,9969, \quad v(t_0; t_1, t_2) = \frac{0,9857}{0,9969} = 0,9888,$$

$$v(t_0; t_2, t_3) = \frac{0,9732}{0,9857} = 0,9873.$$

La struttura per scadenza dei tassi a pronti si ottiene a partire da quella dei prezzi a pronti sulla base della relazione

$$i(t_0, t_k) = \left[ \frac{1}{v(t_0, t_k)} \right]^{\frac{1}{t_k - t_0}} - 1,$$

dove  $i(t_0, t_k)$  è il tasso d'interesse su base annua. Si ottiene

$$i(t_0, t_1) = \left[ \frac{1}{0,9969} \right]^{\frac{365}{18}} - 1 = 0,0650 \quad (6,5\% \text{ annuo}),$$

$$i(t_0, t_2) = \left[ \frac{1}{0,9857} \right]^{\frac{365}{79}} - 1 = 0,0688 \quad (6,88\% \text{ annuo}),$$

$$i(t_0, t_3) = \left[ \frac{1}{0,9732} \right]^{\frac{365}{139}} - 1 = 0,0739 \quad (7,39\% \text{ annuo}).$$

La struttura per scadenza dei tassi d'interesse impliciti si ottiene sulla base della corrispondente struttura per scadenza dei prezzi a termine. Si ha

$$i(t_0; t_0, t_1) = i(t_0, t_1) = 6,5\% \text{ annuo}$$

$$i(t_0; t_1, t_2) = \left[ \frac{1}{0,9888} \right]^{\frac{365}{79-18}} - 1 = 0,0697 \quad (6,97\% \text{ annuo}),$$

$$i(t_0; t_2, t_3) = \left[ \frac{1}{0,9873} \right]^{\frac{365}{139-79}} - 1 = 0,0809 \quad (8,09\% \text{ annuo}).$$

Affinchè non sia possibile realizzare arbitraggi non rischiosi il prezzo a termine  $v(t_0; t_1, t_3) = 0,9867$  deve essere tale da soddisfare la relazione di consistenza con i prezzi a pronti, cioè

$$v(t_0, t_1)v(t_0; t_1, t_3) = v(t_0, t_3).$$

Risulta però

$$\begin{aligned}v(t_0, t_1)v(t_0, t_1, t_3) &= 0,9969 \times 0,9867 = \\ &= 0,9836 > v(t_0, t_3) = 0,9732.\end{aligned}$$

È quindi possibile realizzare un arbitraggio non rischioso ponendo in essere la seguente strategia di compravendita

A) acquisto a pronti, in  $t_0$ , del T.C.N. con scadenza  $t_3$ ;

B) vendita allo scoperto a pronti, in  $t_0$ , allo scoperto di  $v(t_0, t_1, t_3)$  unità del T.C.N. con scadenza in  $t_1$ ;

C) vendita allo scoperto a termine, in  $t_0$ , allo scoperto di 200 unità del T.C.N. unitario con scadenza  $t_3$  e consegna in  $t_1$ .

Tale strategia dà origine alla seguente tabella di payoff

	$t_0$	$t_1$	$t_3$
(A)	-194,64	0	200
(B)	196,72	-197,34	0
(C)	0	197,34	-200
	2,08	0	0

L'importo 2,08 euro rappresenta il profitto da arbitraggio conseguito all'epoca  $t_0 = 0$ .

27. In un mercato finanziario ideale strutturato su tre periodi

$$\{t_0, t_1, t_2\} = \{0, 163, 310\} \quad \text{giorni,}$$

al tempo  $t_0$  sono presenti due titoli a cedola nulla  $Z_1$  e  $Z_2$  con scadenza  $t_1$  e  $t_2$ , rispettivamente, e valore facciale pari a 100 euro. Siano, inoltre,

$$V(t_0, Z_1) = 98,3 \quad \text{euro} \quad \text{e} \quad V(t_0, Z_2) = 97,5 \quad \text{euro}$$

i prezzi in  $t_0$  dei due titoli.

Supponendo che nel mercato sia presente un contratto a termine che al prezzo di 98 euro pattuito in  $t_0$  e da versare in  $t_1$  consente di ricevere 100 euro in  $t_2$ , determinare se è possibile realizzare un arbitraggio non rischioso, l'eventuale profitto di arbitraggio e la strategia necessaria per realizzarlo.

### *Svolgimento*

La struttura per scadenza dei prezzi a pronti si ottiene dalla relazione

$$v(t_0, t_k) = \frac{V(t_0, Z_k)}{100}, \quad k = 1, 2.$$

Si ha

$$v(t_0, t_1) = \frac{98,13}{100} = 0,983 \quad v(t_0, t_2) = \frac{97,5}{100} = 0,975.$$

Il prezzo a termine vigente nel mercato è

$$v(t_0; t_1, t_2) = \frac{98}{100} = 0,98.$$

Affinchè non sia possibile realizzare arbitraggi non rischiosi il prezzo a termine  $v(t_0; t_1, t_2) = 0,98$  deve essere tale da soddisfare la relazione di consistenza con i prezzi a pronti, cioè

$$v(t_0, t_1)v(t_0; t_1, t_2) = v(t_0, t_2).$$

Risulta però

$$v(t_0, t_1)v(t_0; t_1, t_2) = 0,983 \times 0,98 = 0,9633 < v(t_0, t_2) = 0,975.$$

È quindi possibile realizzare un arbitraggio non rischioso ponendo in essere la seguente strategia di compravendita

- A) vendita allo scoperto a pronti, in  $t_0$ , del T.C.N. con scadenza  $t_2$ ;
- B) acquisto in  $t_0$  di  $v(t_0; t_1, t_2)$  unità del T.C.N. con scadenza in  $t_1$ ;
- C) acquisto in  $t_0$  a termine, per consegna in  $t_1$ , del T.C.N. con scadenza in  $t_2$ .

Tale strategia dà origine alla seguente tabella di payoff

	$t_0$	$t_1$	$t_2$
(A)	97,5	0	-100
(B)	-96,33	98	0
(C)	0	-98	100
	1,17	0	0

L'importo 1,17 euro rappresenta il profitto da arbitraggio conseguito all'epoca  $t_0$ .

Nel caso in cui si intenda realizzare un arbitraggio all'epoca  $t_1$  la strategia è la seguente:

- A) vendita allo scoperto a pronti, in  $t_0$ , del T.C.N. con scadenza  $t_2$ ;
- B) acquisto in  $t_0$  di  $\frac{v(t_0, t_2)}{v(t_0, t_1)}$  unità del T.C.N. con scadenza in  $t_1$ .
- C) acquisto in  $t_0$  a termine, per consegna in  $t_1$ , del T.C.N. con scadenza in  $t_2$ .

Tale strategia dà origine alla seguente tabella di payoff

	$t_0$	$t_1$	$t_2$
(A)	97,5	0	-100
(B)	-97,5	99,19	0
(C)	0	-98	100
	0	1,19	0

L'importo 1,19 euro rappresenta il profitto di arbitraggio conseguito all'epoca  $t_1$ .

28. In un mercato finanziario ideale, al tempo  $t_0 = 0$ , si prendano in considerazione due z.c.b.  $Z_1$  e  $Z_2$  con vita a scadenza  $t_1 = 88$  giorni e  $t_2 = 210$  giorni, rispettivamente, e valore facciale pari a 100 euro. Siano, inoltre,

$$V(0, Z_1) = 97,728 \quad \text{euro e} \quad V(0, Z_2) = 93,929 \quad \text{euro}$$

i prezzi dei due titoli.

Determinare la struttura dei tassi a pronti, espressi su base annua considerando la durata dell'anno solare, nonchè  $i(0; 88, 210)$  illustrando la consistenza del metodo.

### *Svolgimento*

Sfruttando il teorema di indipendenza dall'importo possiamo calcolare la struttura per scadenza dei prezzi a pronti

$$v(0, t_1) = \frac{97,728}{100} = 0,97728, \quad v(0, t_2) = \frac{93,929}{100} = 0,93929.$$

La corrispondente struttura per scadenza dei tassi a pronti è

$$i(0, t_1) = \left( \frac{1}{0,97728} \right)^{\frac{365}{88}} - 1 = 0,10 \quad (10\% \quad \text{annuo}),$$

$$i(0, t_2) = \left( \frac{1}{0,93929} \right)^{\frac{365}{210}} - 1 = 0,115 \quad (11,5\% \quad \text{annuo}).$$

Il prezzo a termine implicito nella struttura per scadenza dei prezzi a pronti si calcola sfruttando la relazione di consistenza fra prezzi a pronti e prezzi a termine ed è dato da

$$v(0; t_1, t_2) = \frac{v(t_0, t_2)}{v(t_0, t_1)} = \frac{0,93929}{0,97728} = 0,9611.$$

Il corrispondente tasso a termine è

$$i(0; t_1, t_2) = \left( \frac{1}{0,9611} \right)^{\frac{365}{210-88}} - 1 = 0,1260 \quad (12,6\% \quad \text{annuo}).$$

29. Siano  $V(t_0, Z_1) = 98$  euro e  $V(t_0, Z_2) = 97$  euro i prezzi al tempo  $t_0 = 0$  di due z.c.b. che rimborsano  $Z_1 = Z_2 = 100$  euro alle scadenze  $t_1 = 180$  giorni e  $t_2 = 240$  giorni. Sapendo, inoltre, che il prezzo a termine, pattuito in  $t_0$ , con pagamento in  $t_1$  e rimborso del valore facciale di 100 euro in  $t_2$  è 98,7 euro, determinare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e la struttura per scadenza dei tassi a termine vigente nel mercato al tempo  $t_0$  esprimendo i tassi d'interesse in forma percentuale e su base annua (anno solare). Dire, inoltre, se la struttura dei prezzi sopra definita consente la realizzazione di arbitraggi non rischiosi. In caso affermativo, determinare quale strategia consente la realizzazione dell'arbitraggio ed il relativo profitto.

*Svolgimento*

Sfruttando il teorema di indipendenza dall'importo si ottiene la struttura per scadenza dei prezzi a pronti

$$v(t_0, t_1) = \frac{98}{100} = 0,98 \quad \text{e} \quad v(t_0, t_2) = \frac{97}{100} = 0,97.$$

La corrispondente struttura per scadenza dei tassi d'interesse a pronti è

$$i(t_0, t_1) = \left( \frac{1}{0,98} \right)^{\frac{365}{180}} - 1 = 0,0418 \quad (4,18\% \quad \text{annuo}),$$

$$i(t_0, t_2) = \left( \frac{1}{0,97} \right)^{\frac{365}{240}} - 1 = 0,0474 \quad (4,74\% \quad \text{annuo}).$$

Il prezzo a termine  $v(t_0; t_1, t_2)$  vigente nel mercato al tempo  $t_0$  è

$$v(t_0; t_1, t_2) = \frac{98,7}{100} = 0,987.$$

La struttura per scadenza dei tassi d'interesse a termine è

$$i(t_0; t_0, t_1) = i(t_0, t_1) = 4,18\% \quad \text{annuo},$$

$$i(t_0; t_1, t_2) = \left( \frac{1}{0,987} \right)^{\frac{365}{240-180}} - 1 = 0,0829 \quad (8,29\% \quad \text{annuo}).$$

Affinchè non sia possibile realizzare arbitraggi non rischiosi deve valere la relazione di consistenza fra prezzi a pronti e prezzi a termine

$$v(t_0, t_1)v(t_0; t_1, t_2) = v(t_0, t_2).$$

Risulta però

$$v(t_0, t_1)v(t_0; t_1, t_2) = 0,98 \times 0,987 = 0,9673 < v(t_0, t_2) = 0,97.$$

È quindi possibile realizzare un arbitraggio non rischioso ponendo in essere la seguente strategia di compravendita

A) vendita allo scoperto a pronti, in  $t_0$ , dello z.c.b. con scadenza  $t_2$ ;

B) acquisto, in  $t_0$ , di  $v(t_0; t_1, t_2)$  unità dello z.c.b. con scadenza in  $t_1$ ;

C) acquisto, in  $t_0$ , del titolo a termine per consegna in  $t_1$  dello z.c.b. con scadenza in  $t_2$ .

Tale strategia dà origine alla seguente tabella di payoff

	$t_0$	$t_1$	$t_2$
(A)	97	0	-100
(B)	-96,726	98,7	0
(C)	0	-98,7	100
	0,274	0	0

L'importo 0,274 euro rappresenta il profitto da arbitraggio conseguito all'epoca  $t_0$ .

Od anche, essendo

$$\frac{v(t_0, t_2)}{v(t_0, t_1)} = 0,9898 > v(t_0; t_1, t_2) = 0,987,$$

A) vendita in  $t_0$  allo scoperto del titolo  $Z_2$ ;

B) acquisto in  $t_0$   $\frac{v(t_0, t_2)}{v(t_0, t_1)}$  unità del titolo  $Z_1$ ;

C) acquisto in  $t_0$  del titolo a termine regolandone il prezzo pari a 98,7 euro in  $t_1$ .

Tale strategia dà origine alla seguente tabella di payoff

	$t_0$	$t_1$	$t_2$
(A)	97	0	-100
(B)	-97	98,98	0
(C)	0	-98,7	100
	0	0,28	0

L'importo 0,28 euro rappresenta il profitto da arbitraggio che si conseguirà all'epoca  $t_1$ .

30. Si consideri un titolo a cedola fissa semestrale con valore facciale pari a  $C = 100$  euro, scadenza tre anni e tasso d'interesse nominale convertibile due volte l'anno pari al 10%. Determinare:
- il T.I.R. del titolo nel caso in cui venga emesso alla pari;
  - il T.I.R. del titolo nel caso in cui venga emesso al prezzo  $P = 98,5$  euro;
  - il valore della cedola che garantisce un T.I.R. del 9% su base annua nel caso in cui il titolo venga emesso al prezzo  $P = 98,5$  euro;
  - la *flat yield curve duration* in  $t = 0$  del titolo di cui al punto **c)** e, infine, calcolare la variazione percentuale del valore del titolo in  $t = 0$  nel caso in cui avvenga una variazione all'istante  $t^+ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0}(t + \Delta t)$  del tasso d'interesse semestrale pari a +1%.

*Svolgimento*

- a)** Il tasso semestrale è dato da  $i_2 = j_{\text{nom}}(2)/2 = 5\%$ . L'ammontare della cedola è dato da  $I = i_2 \times C = 5$  euro. Nel caso di titolo a cedola fissa emesso alla pari il T.I.R. coincide con il tasso cedolare cioè

$$i_2^* = \frac{I}{C} = 0,05 \quad (5\% \text{ semestrale}).$$

- b)** Nel caso in cui il titolo viene emesso al prezzo  $P = 98,5$  euro il T.I.R. è quel tasso d'interesse che risolve l'equazione

$$P - I \sum_{k=1}^6 (1+i)^{-k} - C(1+i)^{-6} = 0 \quad (*).$$

Posto

$$v = (1+i)^{-1} \quad \text{e} \quad f(v) = I \sum_{k=1}^6 v^k + Cv^6,$$

occorre determinare  $v^*$  tale che

$$f(v^*) - 98,5 = 0 \quad \text{cioé} \quad 5 \frac{v^*(1-v^{*6})}{1-v^*} + 100v^{*6} - 98,5 = 0.$$

Osserviamo preliminarmente che il T.I.R. esiste in quanto vi è un'unica variazione nei segni dei coefficienti ed inoltre è  $P < 6I + C$ . Trattandosi di un'equazione di sesto grado nell'incognita  $v$  ricorreremo al metodo dell'interpolazione lineare per determinarne l'unica soluzione positiva. Con tale metodo occorre determinare un valore  $v_M$  tale che  $f(v_M) > 98,5$  ed un valore  $v_1$  tale che  $f(v_1) < 98,5$ . Il titolo emesso al prezzo di 98,5 euro è caratterizzato da un tasso di rendimento superiore rispetto a quello del titolo emesso alla pari. Di conseguenza, il T.I.R. su base semestrale dovrà essere maggiore del 5% e, quindi il fattore di sconto semestrale ad esso associato, dovrà essere inferiore al valore  $v = 1,05^{-1} = 0,9524$ . Possiamo utilizzare  $v_M = 0,95$  a cui corrisponde il valore  $f(0,95) = 98,6755$  e  $v_1 = 0,94$  a cui corrisponde  $f(0,94) = 93,2805$ . Ricordando l'algoritmo di calcolo della soluzione dell'equazione (\*)

$$v_{n+1} = v_n + (v_M - v_n) \frac{P - f(v_n)}{f(v_M) - f(v_n)}$$

otteniamo un valore  $v_2 = 0,94967$  a cui corrisponde un valore  $f(v_2) = 98,4931$ . Scegliendo come livello di tolleranza accettabile per il fattore di sconto  $v$ ,  $\varepsilon = 0,0001$ , abbiamo  $v_2 + \varepsilon = 0,94977$ . Poichè  $f(v_2 + \varepsilon) = f(0,94977) = 98,5483 > P$ , allora  $v_2 = 0,94967$  e  $v_2 + \varepsilon = 0,94977$  sono approssimazioni per difetto e per eccesso, rispettivamente, della soluzione con un errore inferiore a 0,0001. Il T.I.R. su base semestrale sarà compreso tra il 5,29% e il 5,30% e su base annua tra 10,86% e il 10,88%.

- c) Al T.I.R. del 9% su base annua ne corrisponde uno su base semestrale  $i_2^* = 4,4\%$ . L'importo della cedola  $I$  che garantisce un T.I.R. semestrale  $i_2^* = 4,4\%$  si ottiene risolvendo l'equazione di primo grado nell'incognita  $I$

$$Ia_{6|i_2^*} + C(1 + i_2^*)^{-6} = 98,5 \quad \text{da cui} \quad I = 4,11 \quad \text{euro.}$$

- d) La duration con struttura piatta è data da

$$D(0, \mathbf{x}) = \frac{Id_{m|i_2^*} + mC(1 + i_2^*)^{-m}}{Ia_{m|i_2^*} + C(1 + i_2^*)^{-m}}.$$

La *dollar duration*,  $d_{m|i_2^*}$ , è uguale a

$$\begin{aligned} d_{m|i_2^*} &= \frac{v_2^*}{1 - v_2^*} \left( \frac{1 - v_2^{*m}}{1 - v_2^*} - mv_2^{*m} \right) = \\ &= \frac{0,9579}{1 - 0,9579} \left( \frac{1 - 0,9579^6}{1 - 0,9579} - (6 \times 0,9579^6) \right) = 17,49. \end{aligned}$$

Inoltre è

$$a_{m|i_2^*} = \frac{1 - (1 + i_2^*)^{-m}}{i_2^*} = 5,17.$$

La duration risulta quindi

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= \frac{4,11 \times 17,49 + 6 \times 100(1,044)^{-6}}{4,11 \times 5,17 + 100(1,044)^{-6}} = \\ &= 5,43 \text{ semestri.} \end{aligned}$$

È importante osservare che il denominatore della duration rappresenta il valore attuale del flusso di importi pagati dal titolo a cedola fissa. Poiché il tasso d'interesse utilizzato nel calcolo di tale valore attuale è proprio il T.I.R del titolo, il suo valore non può che coincidere col prezzo di emissione,  $P = 98,5$  euro.

La variazione percentuale del prezzo del titolo a seguito di una variazione pari a  $\Delta i_2 = 0,01$  del tasso d'interesse è data da

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta i_2}{1 + i_2} D(0, \mathbf{x}) = -\frac{0,01}{1,044} 5,43 = -0,0567 \quad (-5,67\%).$$

31. Si consideri un titolo a cedola fissa annuale di durata pari a 4 anni che abbia tasso nominale annuo dell'8% in un mercato in cui le operazioni finanziarie siano valutate mediante la legge dell'interesse composto con tasso annuo  $i = 5\%$ . Supponendo che il valore nominale (facciale) del titolo sia 200 Euro, se ne determini:
- il prezzo di emissione al tempo  $t = 0$ ;
  - la Duration, espressa in anni, al tempo  $t = 0$ .
  - Si determini la quantità  $\alpha$  di un titolo a cedola nulla con scadenza 2 anni e valore nominale pari a 100 Euro che si deve aggiungere al titolo a cedola fissa di cui sopra in modo da formare un portafoglio che, al tempo  $t = 0$  abbia Duration pari a 3 anni.
  - Si supponga infine che al tempo  $t = 0^+$  il tasso di mercato subisca una variazione positiva  $\Delta i = 0,01$ . Si determini la conseguente variazione percentuale che si verifica sul prezzo del titolo a cedola fissa.

*Svolgimento*

- Per calcolare il prezzo di emissione del titolo al tempo  $t = 0$ , occorre determinare l'ammontare della cedola annuale,  $I = 0,08 \times 200 = 16$  euro. Il prezzo del titolo si ottiene calcolando il valore attuale, al tasso d'interesse di mercato  $i = 5\%$ , del flusso di importi garantito dal titolo stesso:

$$\begin{aligned}
 P &= Ia_{\overline{m}|i} + C(1+i)^{-m} = \\
 &= 16a_{\overline{4}|0,05} + 200(1,05)^{-4} = 221,2757 \quad \text{euro.}
 \end{aligned}$$

- La duration del titolo al tempo  $t = 0$  è uguale a

$$\begin{aligned}
 D(0, \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=0}^m t_k x_k (1+i)^{-t_k}}{\sum_{k=0}^m x_k (1+i)^{-t_k}} = \\
 &= \frac{16(1,05^{-1}) + 32(1,05^{-2}) + 48(1,05^{-3}) + 864(1,05^{-4})}{221,2757} = \\
 &= 3,5998 \quad \text{anni.}
 \end{aligned}$$

- c) Per calcolare la duration di un portafoglio composto dal titolo a cedola fissa e dal titolo a cedola nulla sopra descritti, occorre calcolare il valore e la duration al tempo  $t = 0$  del titolo a cedola nulla. Il valore al tempo  $t = 0$  del titolo a cedola nulla è

$$100(1,05^{-2}) = 90,7029 \text{ euro.}$$

La duration al tempo  $t = 0$  del titolo a cedola nulla coincide con la sua vita a scadenza, 2 anni. La duration al tempo  $t = 0$  di un portafoglio di due titoli è data da

$$D(0, \alpha \mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^2 \alpha_i V(0, x_i) D(0, x_i)}{V(0, \alpha \mathbf{x})}.$$

Le quote di composizione del titolo a cedola nulla e del titolo a cedola fissa sono, rispettivamente,  $\alpha_1 = \alpha$  e  $\alpha_2 = 1$ . Di conseguenza

$$\frac{(\alpha \times 90,7029 \times 2) + (221,2757 \times 3,5998)}{(\alpha \times 90,7029) + 221,2757} = 3$$

Risolvendo per  $\alpha$  si ottiene  $\alpha = 1,4633$ .

- d) La variazione percentuale sul prezzo del titolo a cedola fissa che si verifica al tempo  $t = 0^+$  a seguito di una variazione nel livello del tasso d'interesse pari a  $\Delta i = 0,01$  è uguale, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, a

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta i}{1+i} D(0, \mathbf{x}) = -\frac{0,01}{1,05} 3,5998 = -0,0343 (-3,43\%).$$

32. Si consideri un'obbligazione che paga cedole annue di  $I = 10$  euro, ha valore nominale  $C = 100$  euro e possiede all'epoca  $t_0 = 0$  una vita residua di 3 anni. Supponendo che all'istante  $t_0 = 0$  il mercato sia caratterizzato dalla seguente struttura per scadenza dei tassi d'interesse:

$$i(0, 1) = 0,10, \quad i(0, 1, 2) = 0,08, \quad i(0, 2, 3) = 0,13$$

essendo le scadenze misurate in anni ed i tassi espressi su base annua, calcolare:

- a) la struttura per scadenza dei tassi a pronti

$$i(0, 1), \quad i(0, 2), \quad i(0, 3)$$

implicata dalla struttura per scadenza sopra definita;

- b) la scadenza media aritmetica del titolo calcolata in  $t_0 = 0$ ;  
 c) la duration del titolo calcolata nell'istante  $t_0 = 0$ ;  
 d) il tasso cedolare dell'obbligazione.

*Svolgimento*

- a) Ricordando che in un mercato strutturato su  $m$  periodi i tassi d'interesse a pronti espressi in funzione dei tassi d'interesse a termine si ottengono dalla seguente relazione

$$i(t_0, t_k) = \prod_{j=1}^k [1 + i(t_0; t_{j-1}, t_j)]^{\frac{t_j - t_{j-1}}{t_k - t_0}} - 1,$$

otteniamo

$$i(0, 1) = 10\% \quad \text{annuo}$$

$$\begin{aligned} i(0, 2) &= \{[1 + i(0, 1)][1 + i(0; 1, 2)]\}^{\frac{1}{2}} - 1 = \\ &= (1,1 \times 1,08)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,09 \quad (9\% \text{annuo}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(0, 3) &= \{[1 + i(0, 1)][1 + i(0; 1, 2)][1 + i(0; 2, 3)]\}^{\frac{1}{3}} - 1 = \\ &= 0,1031 \quad (10,31\% \text{ annuo}). \end{aligned}$$

b) la scadenza media aritmetica, calcolata in  $t_0 = 0$ , è data da

$$\bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^m t_k x_k}{\sum_{k=1}^m x_k} = \frac{10 + (2 \times 10) + (3 \times 110)}{10 + 10 + 110} = 2,7692 \quad \text{anni.}$$

c) La duration calcolata in  $t = 0$  è data da

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^m t_k x_k [1 + i(0, t_k)]^{-t_k}}{\sum_{k=1}^m x_k [1 + i(0, t_k)]^{-t_k}} = \\ &= \frac{10(1,1)^{-1} + 2 \times 10(1,09)^{-2} + 3 \times 110(1,1031)^{-3}}{10(1,1)^{-1} + 10(1,09)^{-2} + 110(1,11031)^{-3}} = \\ &= 2,7109 \quad \text{anni.} \end{aligned}$$

d) Il tasso cedolare dell'obbligazione è

$$\frac{I}{C} = 0,10 \quad (10\% \quad \text{annuo}).$$

33. Si consideri il seguente titolo a cedola fissa che garantisce il flusso di pagamenti

$$\{5,25, 5,25, 105,25\} \text{ euro ai tempi } \{1, 2, 3\} \text{ anni.}$$

Considerando la seguente struttura per scadenza dei tassi a termine

$$i(0; 0, 1) = 3,5\%, \quad i(0; 1, 2) = 4,523\%, \quad i(0; 2, 3) = 5,58\%$$

essendo il tempo misurato in anni ed i tassi espressi su base annua, determinare:

- a) la corrispondente struttura per scadenza dei tassi a pronti;
- b) il prezzo di emissione  $P$  del titolo in  $t = 0$  affinché non si possano realizzare arbitraggi non rischiosi;
- d) il T.I.R. del titolo espresso in forma percentuale e su base annua;
- e) il T.I.R. del titolo espresso in forma percentuale e su base annua nel caso in cui fosse stato emesso alla pari.

*Svolgimento*

- a) Ricordando che in un mercato strutturato su  $m$  periodi i tassi d'interesse a pronti espressi in funzione dei tassi d'interesse a termine si ottengono dalla seguente relazione

$$i(t_0, t_k) = \prod_{j=1}^k [1 + i(t_0; t_{j-1}, t_j)]^{\frac{t_j - t_{j-1}}{t_k - t_0}} - 1,$$

otteniamo

$$i(0, 1) = i(0; 0, 1) = 3,5\% \text{ annuo,}$$

$$\begin{aligned} i(0, 2) &= \{[1 + i(0, 1)][1 + i(0; 1, 2)]\}^{\frac{1}{2}} - 1 = \\ &= 0,0401 \quad (4,01\% \text{ annuo}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(0, 3) &= \{[1 + i(0, 1)][1 + i(0; 1, 2)][1 + i(0; 2, 3)]\}^{\frac{1}{3}} - 1 = \\ &= 0,0453 \quad (4,53\% \text{ annuo}). \end{aligned}$$

b) Il valore del titolo in base alla struttura dei tassi è

$$\begin{aligned} & 5,25[1+i(0,1)]^{-1} + 5,25[1+i(0,2)]^{-2} + 105,25[1+i(0,3)]^{-3} = \\ & = 101,9591 \quad \text{euro.} \end{aligned}$$

Quindi il prezzo,  $P$ , deve essere uguale a 101,9591 euro.

c) Il T.I.R. si calcola risolvendo la seguente identità

$$\begin{aligned} f(v) &= I \sum_{k=1}^3 v^k + Cv^3 = P \quad \text{cioé} \\ 5,25 \frac{v(1-v^3)}{1-v} + 100v^3 &= 101,9591 \quad (*). \end{aligned}$$

Osserviamo preliminarmente che il T.I.R. esiste in quanto vi è un'unica variazione nei segni dei coefficienti ed inoltre è  $P < 3I + C$ . Ricorreremo al metodo dell'interpolazione lineare per determinare l'unica soluzione positiva dell'equazione sopra specificata. Occorre determinare un valore  $v_M$  tale che  $f(v_M) > 101,9591$  ed un valore  $v_1$  tale che  $f(v_1) < 101,9591$ . Poichè il titolo è emesso sopra la pari, il relativo tasso interno di rendimento risulterà minore del tasso interno di rendimento del corrispondente titolo a cedola fisso emesso alla pari. In quest'ultimo caso il T.I.R. coincide con il tasso cedolare  $I/C = 0,0525$ , (5,25% annuo). Il fattore di sconto corrispondente al tasso d'interesse del 5,25% è  $v = 1,0525^{-1} = 0,9501$ . Di conseguenza il fattore di sconto corrispondente al T.I.R. del titolo emesso sopra la pari deve essere maggiore di 0,9501. Pertanto, possiamo utilizzare  $v_M = 0,96$  a cui corrisponde il valore  $f(0,96) = 101,9969$  e  $v_1 = 0,9501$  a cui corrisponde  $f(0,9501) = 99,9643$ . Ricordando l'algoritmo di calcolo della soluzione di (\*)

$$v_{n+1} = v_n + (v_M - v_n) \frac{P - f(v_n)}{f(v_M) - f(v_n)}$$

otteniamo un valore  $v_2 = 0,9566$  a cui corrisponde il valore  $f(v_2) = 101,9589$ . Se riteniamo accettabile un livello di tolleranza  $\varepsilon = 0,0001$ , poichè  $f(v_2 + \varepsilon) = 101,9893 > P$  allora il valore  $v_2$  rappresenta un'approssimazione per difetto della

soluzione cercata mentre  $v_2 + \varepsilon$  rappresenta un'approssimazione per eccesso. Il T.I.R. su base annua sarà compreso tra 0,0453 (4,53% annuo) e 0,0454 (4,54% annuo).

- d)** Nel caso di un titolo a cedola fissa emesso alla pari, il T.I.R. coincide con il tasso cedolare cioè

$$i^* = \frac{I}{C} = \frac{5,25}{100} = 0,0525 \quad (5,25\% \text{ annuo}).$$

34. Date le due operazioni finanziarie di investimento  $\mathbf{x}/\mathbf{t}$  e  $\mathbf{y}/\mathbf{t}$  sullo scadenziario  $\mathbf{t} = \{0, 1, 2\}$  anni, definite dai flussi  $\mathbf{x} = \{-90, 7, 90\}$  euro e  $\mathbf{y} = \{-90, 0, A\}$  euro, si determini l'importo  $A$  in modo tale che le due operazioni finanziarie abbiano uguale T.I.R. Calcolare, utilizzando il T.I.R. ottenuto, i valori residui  $V(1,5, \mathbf{x})$  e  $V(1,5, \mathbf{y})$  delle due operazioni finanziarie all'epoca  $t = 1,5$  anni. Determinare, inoltre, le *flat yield curve duration*  $D(0, \mathbf{x}_a)$  e  $D(0, \mathbf{y}_a)$  dei flussi delle attività  $\mathbf{x}_a$  e  $\mathbf{y}_a$  delle due operazioni finanziarie.

### Svolgimento

Il T.I.R. dell'operazione finanziaria  $\mathbf{x}/\mathbf{t}$  si determina risolvendo rispetto all'incognita  $v$  la seguente equazione di secondo grado

$$90v^2 + 7v - 90 = 0 \quad \text{da cui} \quad v^* = 0,9619.$$

Il T.I.R. corrispondente è  $i^* = 0,0396$  (3,96% annuo).

Affinchè le due operazioni finanziarie abbiano uguale T.I.R. l'importo  $A$  deve risolvere l'equazione

$$A \times 0,9619^2 - 90 = 0 \quad \text{da cui} \quad A = 97,2708 \quad \text{euro.}$$

Il valore residuo dell'operazione finanziaria  $\mathbf{x}/\mathbf{t}$  calcolato in  $t = 1,5$  anni è

$$V(1,5, \mathbf{x}) = 90(1,0396)^{-0,5} = 88,2692 \quad \text{euro.}$$

Il valore residuo dell'operazione finanziaria  $\mathbf{y}/\mathbf{t}$  è

$$V(1,5, \mathbf{y}) = 97,2708(1,0396)^{-0,5} = 95,4002 \quad \text{euro.}$$

La duration del flusso delle attività dell'operazione finanziaria  $\mathbf{x}/\mathbf{t}$  è

$$D(0, \mathbf{x}_a) = \frac{7(1,0396)^{-1} + 2 \times 90(1,0396)^{-2}}{7(1,0396)^{-1} + 90(1,0396)^{-2}} = 1,9252 \quad \text{anni.}$$

Poichè il flusso delle attività dell'operazione finanziaria  $\mathbf{y}/\mathbf{t}$  è costituito dall'unico importo  $A$  esigibile in  $t = 2$  anni, la duration coincide con la scadenza della posta  $A$ , cioè  $D(0, \mathbf{x}_a) = 2$  anni.

35. Il suo amico  $\mathcal{A}$  le chiede un consiglio sulla seguente proposta di finanziamento.

$\mathcal{A}$  riceve alla stipula del contratto 7.000 euro, ma subito viene detratto il 3,9% della somma. Il debito viene poi rimborsato con due rate semestrali posticipate di 3.500 euro ciascuna.  $\mathcal{A}$  non è convinto che l'operazione avvenga al tasso annuo del 3,9%, come gli è stato detto, e chiede il suo parere. Qual'è secondo lei il T.I.R. (su base annua) dell'operazione finanziaria?

Il suo amico  $\mathcal{A}$  le chiede inoltre di redigere il piano d'ammortamento della somma di 7.000 euro qualora il rimborso sia effettuato (con la stessa scadenza) con rate bimestrali immediate, costanti e posticipate al tasso d'interesse annuo pari al T.I.R. da lei determinato.

### *Svolgimento*

La somma che  $\mathcal{A}$  deve rimborsare con il versamento delle due rate di 3.500 euro è pari a  $7.000(1 - 0,039) = 6.727$ . Il valore attuale dell'operazione finanziaria, considerando un fattore di sconto semestrale  $v_2$ , è

$$3.500v_2^2 + 3.500v_2 - 6.727 = 0.$$

La soluzione positiva dell'equazione è  $v_2^* = 0,9738$  a cui corrisponde un T.I.R. espresso su base semestrale pari a  $i_2^* = 2,69\%$  equivalente a  $i^* = 5,45\%$  annuo.

Il tasso su base bimestrale equivalente a  $i^*$  è  $i_6^* = 0,89\%$ . Tale tasso d'interesse viene utilizzato per rimborsare la somma  $S = 7.000$  euro mediante sei rate costanti, immediate e posticipate. L'ammontare della rata si ottiene dalla relazione

$$S = Ra_{m|i_2^*} \quad \text{da cui} \quad R = \frac{7.000 \times 0,0089}{1 - (1,0089)^{-6}} = 1.203,2627 \quad \text{euro.}$$

Il piano d'ammortamento è di seguito riportato

$k$	$I_k$	$C_k$	$M_k$
0	0	0	7.000
1	62,3	1.140,9697	5.859,0233
2	52,1453	1.151,1314	4.707,8919
3	41,9002	1.161,3765	3.546,5154
4	31,5640	1.171,7127	2.374,8027
5	21,1357	1.182,1410	1.192,6617
6	10,6147	1.192,6620	$\sim 0$

36. Si consideri l'operazione finanziaria caratterizzata dagli importi  $\{-90, 45, 65\}$  definiti sullo scadenziario  $\{0, 3, 6\}$  mesi. Si calcoli il T.I.R. dell'operazione finanziaria esprimendolo in forma percentuale e su base annua. Si consideri inoltre l'operazione finanziaria di importi  $\{-90, 45, 65, A\}$  esigibili ai tempi  $\{0, 3, 6, 9\}$  mesi. Si determini l'ammontare dell'importo  $A$  in modo tale che le due operazioni finanziarie abbiano uguale T.I.R.

*Svolgimento*

Indicando con  $v_4$  il fattore di sconto trimestrale della legge esponenziale, l'operazione finanziaria sopra definita risulta equa se

$$65v_4^2 + 45v_4 - 90 = 0.$$

Preliminarmente osserviamo che il T.I.R. esiste in quanto vi è un'unica variazione nei segni dei coefficienti dell'equazione ed inoltre  $65 + 45 > 90$ . L'unica soluzione positiva dell'equazione è  $v_4^* = 0,8804$  a cui corrisponde un T.I.R. espresso su base trimestrale  $i_4^* = 13,58\%$ . Il T.I.R. espresso su base annua è  $i^* = 66,42\%$ . Affinchè l'operazione finanziaria di importi  $\{-90, 45, 65, A\}$  esigibili ai tempi  $\{0, 3, 6, 9\}$  mesi abbia uguale T.I.R. di quella precedente occorre che risulti equa in un istante  $t$  rispetto alla legge esponenziale con tasso  $i_4^* = 13,58\%$ . Se consideriamo l'istante  $t = 0$

$$Av_4^{*3} + 65v_4^{*2} + 45v_4^* - 90 = 0.$$

Poichè però

$$65v_4^{*2} + 45v_4^* - 90 = 0$$

l'operazione finanziaria comprensiva dell'importo  $A$  è equa se e solo se  $Av_4^{*3} = 0$ , vale a dire  $A = 0$ .

37. Si determini al tempo  $t_0 = 0$  la duration con struttura piatta di un titolo a cedola fissa con scadenza biennale emesso alla pari al tempo  $t_0 = 0$  con valore facciale  $C = 100$  Euro, cedole semestrali e tasso nominale annuo del 12%, utilizzando come tasso d'interesse il T.I.R. del titolo.

Data un passività di 100 euro da pagare al tempo  $t = 2$  anni, e sapendo che nel mercato è possibile acquistare titoli a cedola nulla con scadenza annuale e quinquennale con valore facciale 100 euro, determinare in  $t_0 = 0$  le quote di composizione del portafoglio attivo immunizzato da shift additivi di ampiezza aleatoria finita nell'ipotesi in cui la curva dei rendimenti sia caratterizzata da un tasso d'interesse costante uguale al T.I.R. del titolo sopra descritto.

*Svolgimento*

Per determinare l'ammontare di ciascuna cedola del titolo sopra descritto occorre calcolare il tasso d'interesse semestrale. In questo caso, poichè  $j_{\text{nom}}(2) = 12\%$ , si ha

$$i_2 = \frac{j_{\text{nom}}(2)}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \quad (6\% \text{ semestrale}).$$

L'ammontare della cedola semestrale è pari a

$$I = i_2 \times C = 0,06 \times 100 = 6 \quad \text{euro.}$$

Il titolo a cedola fissa garantisce il flusso di importi  $\{\mathbf{x}/\mathbf{t}\} = \{6, 6, 6, 106\}/\{1, 2, 3, 4\}$  essendo i tempi misurati in semestri.

Ricordando che nel caso di un titolo a cedola fissa emesso alla pari il T.I.R. coincide con il tasso cedolare, si ha

$$i_2^* = \frac{I}{C} = \frac{6}{100} = 0,06 \quad (6\% \text{ semestrale}).$$

La duration al tempo  $t = 0$  di tale titolo è data da

$$\begin{aligned} D(0, \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{k=1}^4 kx_k(1+i_2^*)^{-k}}{\sum_{k=1}^4 x_k(1+i_2^*)^{-k}} = \\ &= \frac{6(1,06^{-1}) + 2(6)(1,06^{-2}) + 3(6)(1,06^{-3}) + 4(106)(1,06^{-4})}{100} = \\ &= 3,6730 \quad \text{semestri.} \end{aligned}$$

Occorre ora determinare le quote di composizione del portafoglio attivo immunizzato, nel senso del teorema di Fisher e Weil, nei confronti di shift additivi di ampiezza aleatoria finita della curva dei rendimenti caratterizzata da una struttura piatta con tasso d'interesse semestrale  $i_2 = 6\%$ . Ricordiamo che il Teorema di Fisher e Weil impone che il flusso attivo e quello passivo abbiano uguale valore attuale e uguale duration all'epoca in cui si costruisce il portafoglio immunizzato. I due titoli a cedola nulla disponibili nel mercato hanno, al tempo  $t = 0$ , valore

$$V(0, \mathbf{x}_1) = 100(1,06^{-2}) = 88,9996 \text{ euro} \quad \text{e}$$

$$V(0, \mathbf{x}_2) = 100(1,06^{-10}) = 55,8395 \text{ euro}.$$

Il valore in  $t = 0$  della passività da coprire è

$$V(0, P) = 100(1,06^{-4}) = 79,2094 \text{ euro}.$$

Il portafoglio attivo con quote di composizione  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  rispettivamente per il TCN con scadenza annuale e per il TCN con scadenza quinquennale, ha valore in  $t = 0$

$$V(0, \alpha \mathbf{x}) = 88,9996\alpha_1 + 55,8395\alpha_2.$$

La duration in  $t = 0$  dei due TCN presenti nel mercato coincide con la loro scadenza e, quindi,

$$D(0, x_1) = 2 \text{ semestri} \quad \text{e} \quad D(0, x_2) = 10 \text{ semestri}.$$

La duration in  $t = 0$  della passività è

$$D(0, P) = 4 \text{ semestri}.$$

La duration in  $t = 0$  del portafoglio attivo è

$$\begin{aligned} D(0, \alpha \mathbf{x}) &= \frac{\sum_{i=1}^2 \alpha_i V(0, x_i) D(0, x_i)}{V(0, \alpha \mathbf{x})} = \\ &= \frac{(88,9996 \times 2)\alpha_1 + (55,8395 \times 10)\alpha_2}{79,2094}. \end{aligned}$$

Affinchè il portafoglio attivo risulti immunizzato nel senso del teorema di Fisher e Weil dovrà essere

$$V(0, \alpha \mathbf{x}) = V(0, P) \quad \text{e} \quad D(0, \alpha \mathbf{x}) = D(0, P),$$

cioé,

$$88,9996\alpha_1 + 55,8395\alpha_2 = 79,2094$$

$$\frac{177,9992\alpha_1 + 558,395\alpha_2}{79,2094} = 4$$

Risolvendo il sistema rispetto alle due incognite  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  si ottiene  $\alpha_1 = 0,6674$  e  $\alpha_2 = 0,3546$ .

38. Si consideri un individuo  $\mathcal{I}$  in possesso di un capitale certo  $c = 100$  caratterizzato da una funzione di utilità  $u(t) = t + 3t^2$  che deve valutare il seguente investimento con guadagno aleatorio dato da:

$$G = \begin{cases} 20 & \text{con prob. } 1/6 \\ 93 & \text{con prob. } 2/6 \\ 122 & \text{con prob. } 3/6 \end{cases}$$

Determinare il valore atteso, la varianza, l'utilità attesa e l'equivalente certo dell'operazione finanziaria  $X = c + G$ .

Nel caso in cui l'individuo  $\mathcal{I}$  sia caratterizzato da una funzione di utilità  $u(t) = at^2 + t$ , ( $a > 0$ ), dire, motivando la risposta, se preferisce l'operazione di cui sopra all'operazione che garantisce con certezza un importo pari a 195,33 euro.

### *Svolgimento*

La posizione finanziaria  $X$  è così definita

$$X = \begin{cases} 120 & \text{con prob. } 1/6 \\ 193 & \text{con prob. } 2/6 \\ 222 & \text{con prob. } 3/6 \end{cases}$$

Il valore atteso dell'operazione finanziaria sopra definita è

$$E(X) = \left(120 \times \frac{1}{6}\right) + \left(193 \times \frac{2}{6}\right) + \left(222 \times \frac{3}{6}\right) = 195,33 \text{ euro.}$$

Ricordando che per la varianza di una variabile aleatoria vale  $V(G) = E(G^2) - E^2(G)$ , otteniamo

$$E(X^2) = \left(120^2 \times \frac{1}{6}\right) + \left(193^2 \times \frac{2}{6}\right) + \left(222^2 \times \frac{3}{6}\right) = 39458,33$$

e, di conseguenza

$$V(X) = 39458,33 - 195,33^2 = 1.304,52.$$

L'utilità attesa è data da

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= (120+3 \times 120^2) \frac{1}{6} + (193+3 \times 193^2) \frac{2}{6} + (222+3 \times 222^2) \frac{3}{6} = \\ &= 118.570,33. \end{aligned}$$

L'equivalente certo dell'operazione finanziaria è

$$m_u = u^{-1}\{E[u(X)]\}.$$

Occorre quindi invertire la funzione di utilità  $u(t) = 3t^2 + t$  nel tratto crescente. Riscrivendola come  $3t^2 + t - u = 0$  si ha

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12u}}{6}.$$

Bisogna ora valutare la funzione inversa nel punto  $E[u(X)]$ , al riguardo si ottiene

$$m_u = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12 \times 118570,33}}{6} = 198,64 \text{ euro}.$$

Una funzione di utilità  $u(t) = at^2 + t$  ( $a > 0$ ) contraddistingue individui propensi al rischio per i quali vale

$$E[u(X)] > u[E(X)].$$

Poiché nel nostro caso  $E(X) = 195,33$  euro, si può concludere che  $\mathcal{I}$  preferisce l'operazione finanziaria aleatoria  $X$  all'operazione finanziaria con guadagno certo pari a 195,33 euro.

39. L'investimento di 10.000 euro dà luogo dopo un anno al ricavo descritto dalla seguente variabile aleatoria:

$$R = \begin{cases} 15.000 & \text{con prob. } 2/5 \\ 20.000 & \text{con prob. } 5/10 \\ 25.000 & \text{con prob. } 1/10 \end{cases}$$

Detta  $\Phi$  la variabile aleatoria REA dell'investimento, utilizzando un tasso d'interesse annuo del 3% e una sottostante legge di capitalizzazione esponenziale, determinare:

- la funzione di distribuzione di probabilità del REA dell'investimento;
- il valore atteso del REA dell'investimento;
- l'equivalente certo del REA considerando una funzione di utilità  $u(t) = t - 0,00001t^2$ .

*Svolgimento*

a) La variabile aleatoria REA dell'investimento è

$$\Phi = \begin{cases} 15.000(1,03)^{-1} - 10.000 = 4.563,1068 & \text{con prob. } 2/5 \\ 20.000(1,03)^{-1} - 10.000 = 9.417,4752 & \text{con prob. } 5/10 \\ 25.000(1,03)^{-1} - 10.000 = 14.271,8447 & \text{con prob. } 1/10 \end{cases}$$

La funzione di ripartizione  $F_{\Phi}(t) = \text{Prob}(\Phi \leq t)$  è la seguente

$$F_{\Phi}(t) = \begin{cases} 0 & t < 4.563,1068 \\ 2/5 & 4.563,1068 \leq t < 9.417,4752 \\ 9/10 & 9.417,4752 \leq t < 14.271,8447 \\ 1 & 14.271,8447 \leq t \end{cases}$$

b) Il valore atteso del REA è

$$\begin{aligned} E(\Phi) &= \left(4.563,1068 \times \frac{2}{5}\right) + \left(9.417,4752 \times \frac{5}{10}\right) + \\ &+ \left(14.271,8447 \times \frac{1}{10}\right) = 7.961,1648 \quad \text{euro.} \end{aligned}$$

c) L'utilità attesa del REA è

$$\begin{aligned} E[u(\Phi)] &= \frac{2}{5}(4.563,1068 - 0,00001 \times 4.563,1068^2) + \\ &+ \frac{5}{10}(9.417,4752 - 0,00001 \times 9.417,4752^2) + \\ &+ \frac{1}{10}(14.271,8447 - 0,00001 \times 14.271,8447^2) = 7.230,7473. \end{aligned}$$

Per determinare l'equivalente certo dobbiamo invertire la funzione di utilità  $u(t) = t - 0,00001t^2$ . Riscrivendola nella forma  $0,00001t^2 - t + u = 0$ , esplicitando in funzione di  $t$  otteniamo

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0,00004u}}{0,00002}.$$

Bisogna ora valutare la funzione inversa nel punto  $E[u(\Phi)]$ . Dobbiamo scartare la soluzione col segno positivo che produce un equivalente certo che cade nel ramo discendente della funzione di utilità. L'altra soluzione produce un equivalente certo dato da

$$m_u = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,00004 \times 7.230,7473}}{0,00002} = 7.846,4086 \text{ euro.}$$

40. L'azienda Alfa deve valutare se scegliere il progetto d'investimento  $A$  o  $B$  tenendo conto che, a parità di somma iniziale investita, i ricavi prodotti sono rappresentati, rispettivamente, dalle variabili aleatorie,

$$X_A = \begin{cases} 2100 & \text{con prob. } 1/4 \\ 2300 & \text{con prob. } 3/4 \end{cases}$$

$$X_B = \begin{cases} 2010 & \text{con prob. } 4/9 \\ 2200 & \text{con prob. } 3/9 \\ 2390 & \text{con prob. } 2/9 \end{cases}$$

Determinare l'alternativa preferita in base al criterio della dominanza stocastica e della media-varianza. Nel caso in cui la funzione di utilità dell'azienda Alfa sia  $u(t) = t - 0,0001t^2$ , determinare l'ordinamento di preferenza in base al criterio dell'utilità attesa.

### *Svolgimento*

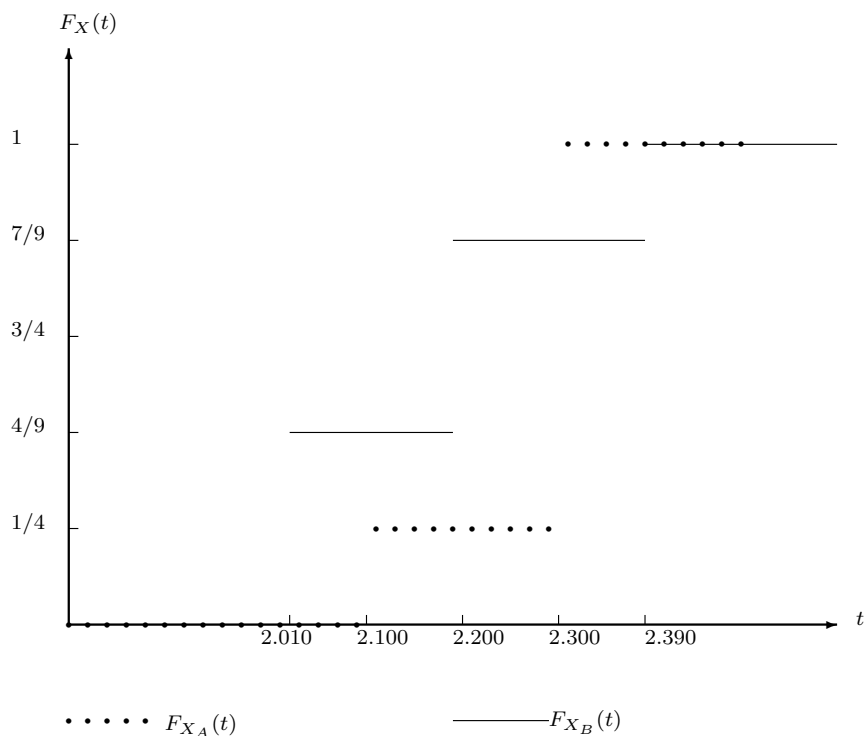
Le funzioni di ripartizione delle variabili aleatorie  $X_A$  e  $X_B$  sono di seguito riportate

$$F_{X_A}(t) = \begin{cases} 0 & t < 2.100 \\ 1/4 & 2.100 \leq t < 2.300 \\ 1 & 2.300 \leq t \end{cases}$$

$$F_{X_B}(t) = \begin{cases} 0 & 2.010 < t \\ 4/9 & 2.010 \leq t < 2.200 \\ 7/9 & 2.200 \leq t < 2.390 \\ 1 & 2.390 \leq t \end{cases}$$

Come si evince dal grafico di seguito riportato, le due alternative non sono confrontabili con il metodo della dominanza stocastica. Infatti, è possibile individuare due punti,  $x_1$  e  $x_2$  tali che  $F_{X_A}(x_1) < F_{X_B}(x_1)$  e  $F_{X_A}(x_2) > F_{X_B}(x_2)$  e, di conseguenza, risulta violata la prima delle due condizioni del criterio della dominanza stocastica. Ad esempio, per  $x_1 = 2.050$

si ha  $F_{X_A}(2.050) = 0$  e  $F_{X_B}(2.050) = 4/9$  e per  $x_2 = 2.350$ ,  
 $F_{X_A}(2.350) = 1$  e  $F_{X_B}(2.350) = 7/9$ .



Per applicare il metodo della media-varianza dobbiamo calcolare la media e la varianza delle due alternative

$$E(X_A) = \left(2.100 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2.300 \times \frac{3}{4}\right) = 2.250 \text{ euro},$$

$$E(X_A^2) = \left(2.100^2 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2.300^2 \times \frac{3}{4}\right) = 5.070.000,$$

$$V(X_A) = E(X_A^2) - E^2(X_A) = 7.500.$$

$$E(X_B) = \left(2.010 \times \frac{4}{9}\right) + \left(2.200 \times \frac{3}{9}\right) + \left(2.390 \times \frac{2}{9}\right) =$$

$$= 2.157,78 \text{ euro},$$

$$E(X_B^2) = \left(2.010^2 \times \frac{4}{9}\right) + \left(2.200^2 \times \frac{3}{9}\right) + \left(2.390^2 \times \frac{2}{9}\right) =$$

$$= 4.678.288,889,$$

$$V(X_B) = E(X_B^2) - E^2(X_B) = 22.274,361.$$

Poiché  $E(X_A) > E(X_B)$  e  $V(X_A) < V(X_B)$ , per il criterio della media-varianza risulta

$$A \succ B.$$

L'utilità attesa del progetto d'investimento  $A$  è

$$\begin{aligned} E[u(X_A)] &= \left(2.100 - 0,0001 \times 2.100^2\right) \frac{1}{4} + \\ &+ \left(2.300^2 - 0,0001 \times 2.300^2\right) \frac{3}{4} = 1.743. \end{aligned}$$

L'utilità attesa del progetto d'investimento  $B$  è

$$\begin{aligned} E[u(X_B)] &= \left(2.010 - 0,0001 \times 2.010^2\right) \frac{4}{9} + \\ &+ \left(2.200 - 0,0001 \times 2.200^2\right) \frac{3}{9} + \\ &+ \left(2.390 - 0,0001 \times 2.390^2\right) \frac{4}{9} = 1.689,95. \end{aligned}$$

Poiché risulta  $E[u(X_A)] > E[u(X_B)]$  allora  $A \succ B$ .

41. L'investimento al tempo  $t = 0$  di 10 euro dà luogo ai seguenti ricavi aleatori:

$$R_1 = \{2, 10\} \quad \text{alle epoche } \mathbf{t} = \{1, 2\} \quad \text{anni} \quad \text{con prob. } 0,25$$

$$R_2 = \{1, 11\} \quad \text{alle epoche } \mathbf{t} = \{1, 2\} \quad \text{anni} \quad \text{con prob. } 0,75.$$

Determinare:

- il valore atteso del T.I.R. dell'investimento;
- lo scarto quadratico medio del T.I.R. dell'investimento;
- descrivere la funzione di distribuzione di probabilità del T.I.R. dell'investimento.

*Svolgimento*

Poiché l'investimento di 10 euro dà luogo ad un flusso di ricavi aleatori, il T.I.R. ad esso relativo è una variabile aleatoria che si otterrà come soluzione delle seguenti equazioni

$$\begin{cases} 10(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-1} - 10 = 0 & \text{con prob. } 0,25 \\ 11(1+i)^{-2} + (1+i)^{-1} - 10 = 0 & \text{con prob. } 0,75 \end{cases}$$

Ricordando che  $v = (1+i)^{-1}$  possiamo riscrivere le due equazioni come

$$\begin{cases} 10v^2 + 2v - 10 = 0 & \text{con prob. } 0,25 \\ 11v^2 + v - 10 = 0 & \text{con prob. } 0,75 \end{cases}$$

Risolvendo le due equazioni rispetto a  $v$  e considerando solo la soluzione positiva si ha

$$v^* = \begin{cases} 0,9050 & \text{con prob. } 0,25 \\ 0,9091 & \text{con prob. } 0,75 \end{cases}$$

Ricordando che  $i^* = 1/v^* - 1$ , il T.I.R. è quindi la variabile aleatoria di seguito riportata

$$i^* = \begin{cases} 0,1050 & \text{con prob. } 0,25 \\ 0,1 & \text{con prob. } 0,75 \end{cases}$$

Il valore atteso del T.I.R. è

$$\begin{aligned} E(i^*) &= (0,1050 \times 0,25) + (0,1 \times 0,75) = \\ &= 0,1013 \quad (10,13\% \text{ annuo}). \end{aligned}$$

Il momento del second'ordine è

$$E(i^{*2}) = (0,1050^2 \times 0,25) + (0,1^2 \times 0,75) = 0,0103.$$

La varianza è

$$V(i^*) = E(i^{*2}) - E^2(i^*) = 0,00004.$$

Lo scarto quadratico medio è  $\sigma(i^*) = \sqrt{V(i^*)} = 0,0063$ . La funzione di distribuzione di probabilità del T.I.R. dell'investimento è

$$F_{i^*}(i) = \begin{cases} 0 & i < 0,1 \\ 0,75 & 0,1 \leq i < 0,1050 \\ 1 & 0,1050 \leq i \end{cases}$$

42. Si consideri un individuo  $\mathcal{I}$  caratterizzato da una funzione di utilità  $u(t) = 4 \log(t) + 5$  che possiede un capitale certo  $c = 500$  euro e deve valutare i seguenti investimenti con guadagno aleatorio dato da:

$$G_1 = \begin{cases} -70 & \text{con prob. } 1/4 \\ 120 & \text{con prob. } 3/4 \end{cases} \quad G_2 = \begin{cases} -45 & \text{con prob. } 1/3 \\ 80 & \text{con prob. } 2/3 \end{cases}$$

$G_3$  con distribuzione uniforme nell'intervallo  $(-60, 150)$ . Definite le posizioni finanziarie  $X_i = c + G_i, i = 1, 2, 3$ , determinare l'ordinamento delle preferenze:

- a) in base al criterio del valore atteso;
- b) in base al criterio dell'utilità attesa.
- c) Definita la posizione finanziaria  $X_4 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2, \alpha \in (0, 1)$ , determinare  $\alpha$  in modo tale che  $E(X_4) = E(X_3)$ . Utilizzando il valore di  $\alpha$  così ottenuto, determinare l'ordinamento delle preferenze secondo il criterio dell'utilità attesa nell'ipotesi in cui  $X_1$  e  $X_2$  siano variabili aleatorie indipendenti.

### *Svolgimento*

- a) Le variabili aleatorie  $X_i, i = 1, 2, 3$ , sono definite nel modo seguente

$$X_1 = \begin{cases} 430 & \text{con prob. } 1/4 \\ 620 & \text{con prob. } 3/4 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 455 & \text{con prob. } 1/3 \\ 580 & \text{con prob. } 2/3 \end{cases}$$

mentre  $X_3$  è una variabile aleatoria con distribuzione uniforme nell'intervallo  $(440, 650)$ . I valori attesi delle tre operazioni finanziarie sono di seguito riportati

$$E(X_1) = 572,5 \quad E(X_2) = 538,33$$

mentre, ricordando che una variabile aleatoria  $X$  con distribuzione uniforme nell'intervallo  $(a, b)$  ha funzione di densità

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e valore atteso  $E(X) = (a + b)/2$ , abbiamo

$$E(X_3) = \frac{a + b}{2} = \frac{440 + 650}{2} = 545.$$

In base al criterio del valore atteso è

$$X_1 \succ X_3 \succ X_2.$$

b) L'utilità attesa delle operazioni finanziarie è

$$E[u(X_1)] = 30,3529 \quad E[u(X_2)] = 30,1285,$$

mentre per la variabile aleatoria uniforme si ha

$$\begin{aligned} E[u(X_3)] &= \int_a^b u(t) f_{X_3}(t) dt = \int_a^b (4 \log(t) + 5) \frac{1}{b-a} dt = \\ &= \frac{4}{b-a} \int_a^b \log(t) dt + \frac{5}{b-a} \int_a^b dt. \end{aligned}$$

Integrando per parti la funzione  $f(t) = \log(t)$  si ottiene

$$\begin{aligned} E[u(X_3)] &= \frac{4}{b-a} (|t \log(t)|_a^b - |t|_a^b) + \frac{5}{b-a} |t|_a^b = \\ &= \frac{4}{210} (650 \log(650) - 440 \log(440) - 650 + 440) + \frac{5}{210} (650 - 440) = \\ &= 30,1781. \end{aligned}$$

In base al criterio dell'utilità attesa risulta

$$X_1 \succ X_3 \succ X_2.$$

c) Il valore atteso dell'operazione finanziaria

$$X_4 = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \text{è}$$

$$E(X_4) = \alpha E(X_1) + (1 - \alpha) E(X_2) = \alpha [E(X_1) - E(X_2)] + E(X_2).$$

Bisogna determinare  $\alpha$  in modo che

$$E(X_4) = \alpha[E(X_1) - E(X_2)] + E(X_2) = E(X_3),$$

da cui

$$\alpha = \frac{E(X_3) - E(X_2)}{E(X_1) - E(X_2)} = 0,1952.$$

Le possibili determinazioni della variabile aleatoria  $X_4$  sono quattro, la piú piccola delle quali è

$$0,1952 \times 430 + (1 - 0,1952) \times 455 = 450,12$$

e la relativa probabilità è

$$\begin{aligned} \text{Prob}[(X_1 = 430) \cap (X_2 = 455)] &= \\ &= \text{Prob}[X_1 = 430]\text{Prob}[X_2 = 455] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Analogamente si procede per le altre determinazioni ottenendo

$$X_4 = \begin{cases} 450,12 & \text{con prob. } 1/12 \\ 550,72 & \text{con prob. } 2/12 \\ 487,208 & \text{con prob. } 3/12 \\ 587,808 & \text{con prob. } 6/12 \end{cases}$$

Occorre adesso calcolare l'utilità attesa della posizione finanziaria  $X_4$ . Risulta  $E[u(X_4)] = 30,1855$  e, di conseguenza,  $X_1 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_2$ .

43. Un individuo  $\mathcal{I}$ , caratterizzato da una funzione di utilità  $u(t)$  e da un capitale certo  $c = 1.000$  euro, deve valutare un'operazione finanziaria di guadagno aleatorio  $G$ . Sapendo che l'equivalente certo della posizione finanziaria  $X = c+G$  percepito dall'individuo è 1.100 euro, determinare l'avversione al rischio  $r(c)$  e l'utilità attesa della posizione  $X$  nell'ipotesi che:

- a) la funzione di utilità di  $\mathcal{I}$  sia  $u(t) = 16 \log(t)$ ;
- b) la funzione di utilità di  $\mathcal{I}$  sia  $u(t) = 690(1 - e^{-t/690})$ ;
- c) la funzione di utilità di  $\mathcal{I}$  sia  $u(t) = t - \frac{1}{2730}t^2$ .

*Svolgimento*

Ricordiamo che la misura assoluta di avversione al rischio è

$$r(t) = -\frac{u''(t)}{u'(t)}.$$

- a) Nel caso di una funzione di utilità logaritmica  $u(t) = a \log t + b$ , la misura di avversione al rischio è

$$r(t) = \frac{1}{t} \quad \text{e, di conseguenza,}$$

$$r(c) = \frac{1}{c} = 0,001.$$

- b) Nel caso di una funzione di utilità esponenziale del tipo  $u(t) = a(1 - e^{-t/a})$  il coefficiente di avversione al rischio è  $r(t) = 1/a$ . Nel nostro caso

$$r(c) = \frac{1}{a} = \frac{1}{690} = 0,0014.$$

- c) Nel caso di una funzione di utilità quadratica del tipo  $u(t) = t - \frac{a}{2}t^2$ , il coefficiente di avversione al rischio è

$$r(t) = \frac{a}{1 - at} \quad \text{e, di conseguenza,}$$

$$r(c) = \frac{a}{1 - a \times c} = 0,0026.$$

Per determinare l'utilità attesa dell'operazione finanziaria sfruttiamo la relazione

$$E[u(X)] = u(m_u).$$

**a)** Nel caso della funzione di utilità logaritmica

$$E[u(X)] = 16 \log(1.100) = 112,049.$$

**b)** Nel caso della funzione di utilità esponenziale

$$E[u(X)] = 690(1 - e^{-\frac{1.100}{690}}) = 549,8815.$$

**c)** Nel caso della funzione di utilità quadratica

$$E[u(X)] = 1.110 - \frac{1}{2.730} \times 1.100^2 = 656,7766.$$

44. Investendo 100 euro oggi si possono avere

101,34	euro fra 18 giorni con probabilità	0,5
102,07	euro fra 29 giorni con probabilità	0,24
107,94	euro fra 139 giorni con probabilità	0,26

Descrivere in regime esponenziale la variabile aleatoria *tassi di rendimento* su base annua, la sua funzione di ripartizione di probabilità e determinarne il valore atteso.

Data la funzione di utilità  $u(t) = 12 \log(t) + 9$ , determinare l'equivalente certo.

*Svolgimento*

Indichiamo con  $I$  la variabile aleatoria che descrive il tasso di rendimento su base annua in regime esponenziale. Essa è di seguito definita

$$I = \begin{cases} \left( \frac{101,34}{100} \right)^{\frac{365}{18}} - 1 = 0,3099 & \text{con prob. } 0,5 \\ \left( \frac{102,07}{100} \right)^{\frac{365}{29}} - 1 = 0,2942 & \text{con prob. } 0,24 \\ \left( \frac{107,94}{100} \right)^{\frac{365}{139}} - 1 = 0,222 & \text{con prob. } 0,26 \end{cases}$$

La funzione di ripartizione della variabile aleatoria  $I$  è

$$F_I(i) = \begin{cases} 0 & i < 0,2222 \\ 0,26 & 0,2222 \leq i < 0,2942 \\ 0,5 & 0,2942 \leq i < 0,3099 \\ 1 & 0,3099 \leq i \end{cases}$$

Il valore atteso di  $I$  è

$$E(I) = (0,3099 \times 0,5) + (0,2942 \times 0,24) + (0,2222 \times 0,26) =$$

$$= 0,2833.$$

L'utilità attesa è

$$E[u(I)] = 0,5(12 \log(0,3099) + 9) + 0,24(12 \log(0,2942) + 9) + \\ + 0,26(12 \log(0,222) + 9) = -6,2485.$$

Per determinare l'equivalente certo bisogna invertire la funzione di utilità  $u(t) = 12 \log(t) + 9$ . L'inversa è

$$t = e^{\frac{u-9}{12}} \quad \text{da cui} \quad m_u(X) = e^{\frac{E[u(X)]-9}{12}} = 0,2806.$$

45. Si consideri un individuo  $\mathcal{I}$  che deve valutare due alternative di investimento, la prima delle quali caratterizzata da un guadagno aleatorio  $X$  con distribuzione uniforme nell'intervallo  $(a, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}^+$  e  $a < b$ , e la seconda caratterizzata da un guadagno certo  $Y = \frac{a+b}{2}$ .

Determinare l'ordinamento delle preferenze in base al criterio della dominanza stocastica.

Determinare l'ordinamento delle preferenze nel caso in cui  $\mathcal{I}$  è:

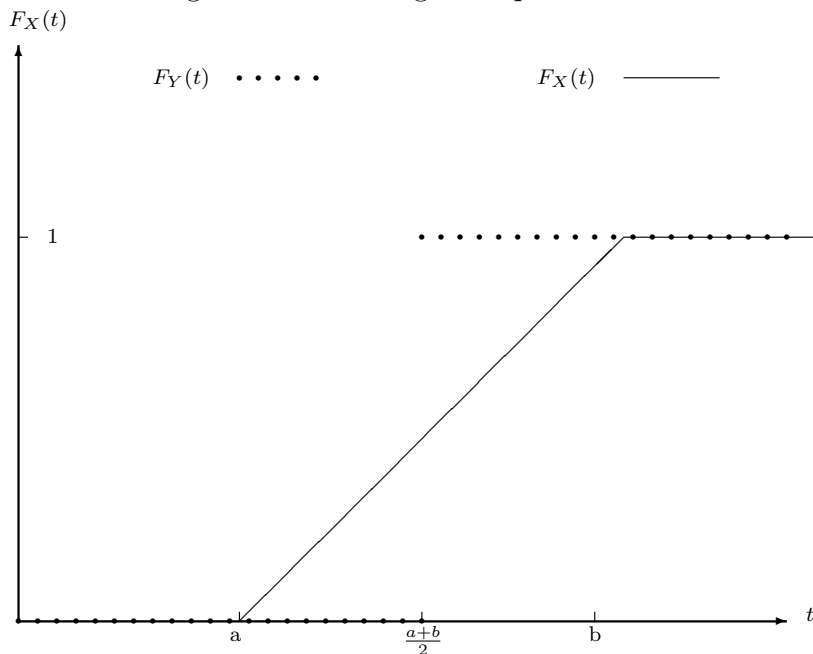
- a) avverso al rischio;
- b) indifferente al rischio;
- c) propenso al rischio.

*Svolgimento*

Le funzioni di ripartizione delle due variabili aleatorie sono

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t < b \\ 1 & b \leq t \end{cases} \quad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{a+b}{2} \\ 1 & \frac{a+b}{2} \leq t \end{cases}$$

ed i relativi grafici sono di seguito riportati



Secondo il criterio della dominanza stocastica i due investimenti non sono confrontabili. Infatti,  $F_X((a+b)/2) = 0,5 < F_Y((a+b)/2) = 1$  mentre in un intorno sinistro del punto  $(a+b)/2$  si verifica la disuguaglianza contraria.

Nel caso di un individuo avverso al rischio per la disuguaglianza di Jensen si ha

$$E[u(X)] < u[E(X)].$$

Nel nostro caso  $E(X) = Y$  e, quindi

$$E[u(X)] < u(Y) = E[u(Y)].$$

Possiamo concludere che per un individuo avverso al rischio risulta  $Y \succ X$ .

Con analogo ragionamento si dimostra che per un individuo indifferente al rischio è  $X \sim Y$  e che per un individuo propenso al rischio è  $X \succ Y$ .

46. Si consideri un individuo  $\mathcal{I}$  con un capitale certo  $c = 150$  euro caratterizzato da una funzione di utilità  $u(t) = 60(1 - e^{-t/60})$  che deve valutare i seguenti investimenti con guadagno aleatorio dato da:

$$G_1 = \begin{cases} 170 & \text{euro con prob. } 1/4 \\ 230 & \text{euro con prob. } 3/4 \end{cases}$$

$G_2$  con distribuzione uniforme nell'intervallo  $(150, 290)$  euro. Determinare l'ordinamento delle preferenze tra le alternative di investimento:

- a) in base al criterio del valore atteso;
- b) in base al criterio dell'equivalente certo.

*Svolgimento*

Definiamo le posizioni finanziarie  $X_1 = c + G_1$  e  $X_2 = c + G_2$ .

$$X_1 = \begin{cases} 320 & \text{euro con prob. } 1/4 \\ 380 & \text{euro con prob. } 3/4 \end{cases}$$

mentre  $X_2$  ha distribuzione uniforme nell'intervallo  $(300, 440)$  euro. Il valore atteso della prima operazione finanziaria è

$$E(X_1) = \left(\frac{1}{4} \times 320\right) + \left(\frac{3}{4} \times 380\right) = 365 \quad \text{euro.}$$

Il valore atteso del guadagno della seconda operazione finanziaria è

$$E(X_2) = \frac{300 + 440}{2} = 370 \quad \text{euro.}$$

Secondo il criterio del valore atteso risulta  $X_2 \succ X_1$ .

L'utilità attesa della prima operazione finanziaria è

$$E[u(X_1)] = \frac{1}{4} \left[ 60(1 - e^{-320/60}) \right] + \frac{3}{4} \left[ 60(1 - e^{-380/60}) \right] = 59,8477.$$

L'utilità attesa della seconda operazione finanziaria è

$$E[u(X_2)] = \int_{300}^{440} \frac{1}{440 - 300} 60(1 - e^{-t/60}) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{60}{140} \left[ \int_{300}^{440} dt - \int_{300}^{440} e^{-t/60} dt \right] = \\
&= \frac{60}{140} (|t|_{300}^{440} + |60e^{-t/60}|_{300}^{440}) = 59,8595.
\end{aligned}$$

Per calcolare l'equivalente certo della due operazioni finanziarie occorre determinare l'inversa della funzione di utilità  $u(t) = a(1 - e^{-t/a})$ . Essa è

$$t = -a \log \left( 1 - \frac{u}{a} \right).$$

L'equivalente certo della prima operazione finanziaria è

$$\begin{aligned}
m_u(X_1) &= u^{-1}\{E[u(X_1)]\} = -60 \log \left( 1 - \frac{59,8477}{60} \right) = \\
&= 358,5749 \quad \text{euro.}
\end{aligned}$$

L'equivalente certo della seconda operazione finanziaria è

$$\begin{aligned}
m_u(X_2) &= u^{-1}\{E[u(X_2)]\} = -60 \log \left( 1 - \frac{59,8595}{60} \right) = \\
&= 363,4135 \quad \text{euro.}
\end{aligned}$$

Poiché  $m_u(X_2) > m_u(X_1)$  allora  $X_2 \succ X_1$ .